Exercice 1 :

1)Donner la forme algébrique de $z = \frac{1-2i}{\sqrt{2}+i\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{3}}{1-2i}$

2)Soient a et b deux nombres complexe non nuls ayant le même module .montrer que le complexe $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ est réel

Exercice 2 :

Soit $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $z = \frac{\left(1-e^{i2\theta}\right)^2}{e^{-i2\theta}\left(1+e^{i2\theta}\right)}$

1)Déterminer en fonction de θle module et un argument de z

2)Calculer θ pour que z soit réel

Exercice 3 : (extrait du Bac Sc 2011)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct .On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

1)a)Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres a et b

b)Vérifier que $b^2 = a$

2)Soit C le point d'affixe $c = a + b$

a)Placer les points A , B et C

b)Vérifier que $c = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 4 :

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct$(o;\vec{u};\vec{v})$. On donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

1)Mettre sous forme exponentielle les complexes z_A ; z_b et $z = \frac{z_A}{z_B}$

2)En déduire $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

3)On considère les points C et D d'affixes respectives

$Z_1 = z_A + z_B$ et $Z_2 = z_A - z_B$

a)Placer les points A , B , C et D

b)Quel est la nature du quadrilatère OACB

c)En déduire le module et un argument de Z_1 et Z_2

d)Retrouver ce résultat par le calcul

Exercice 5 : (Bac 2005)

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct$(o;\vec{u};\vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\,Z$ et $z_B = 1 - i\,Z$; avec $Z = x + i\,y$; $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $Z = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

1)a)Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$,on a $1 + e^{ix} = 2cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$ et

$1 - e^{ix} = -2\,i\,sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$

b)En déduire l'écriture exponentielle de : $Z_1 = 1 + cos\alpha + i\,sin\alpha$;

$Z_2 = 1 - cos\alpha - i\,sin\alpha$; z_A ; z_B ; $i + Z$ et $i - Z$

2)a)Montrer que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $|Z| = 1$

b)Montrer que les points O , A et B sont alignés si et seulement si $x = 0$

c)Déterminer le complexe Z pour que OAB soit un triangle isocèle rectangle en O

3)a)Montrer que A et B sont symétriques par rapport à un point fixe à préciser

b)Déterminer l'ensemble des points A$(1 + iZ)$ lorsque α varie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

c)En déduire l'ensemble des points B$(1 - iZ)$ lorsque α décrit $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$