# Similitudes

## I- Homothéties

Une homothétie de rapport $\lambda$ ( $\lambda$ réel non nul) :

| conserve | transforme | multiplie |
|---|---|---|
| Les mesures angles orientés | Une droite en une droite parallèle | Les distances par $\lvert\lambda\rvert$ |

## II- Similitudes directes

### II-1. Définition :

Une similitude directe est une transformation du plan qui multiplie les distances par un réel strictement positif et qui conserve les mesures des angles orientés.

**Conséquences :**

- ✓ Une similitude directe est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.
- ✓ Une similitude directe de rapport 1 est un déplacement.
- ✓ Une similitude directe, qui n'est pas une translation, admet un unique point invariant $\Omega$ appelé son centre.

### II- 2. Propriétés :

Une similitude directe s est entièrement déterminée par la donnée de deux points distincts A et B et de leur image A' et B'.

**Eléments caractéristiques** : s est la similitude directe transformant A en A' et B en B'

Le rapport k et l'angle $\theta$ de s sont donnés par : $k = \dfrac{A'B'}{AB}$ et $\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right)[2\pi]$ .

Lorsque s n'est pas une translation : s(M) = M' $\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k.\Omega M \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \theta[2\pi],\ M \neq \Omega \end{cases}$

**Forme réduite (canonique)**

Si $k \in IR_+^* \setminus \{1\}$ alors $s = R(\Omega , \theta) \circ H(\Omega , k) = H(\Omega , k) \circ R(\Omega , \theta)$

**Classification**: Soit s une similitude directe de rapport k et d'angle $\theta$ . Le tableau ci-dessous énumère les différentes formes que peut prendre s :

| | | | |
|---|---|---|---|
| K = 1 | $\theta = 0$<br>translation | $\theta = \pi$<br>symétrie centrale | $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$<br>rotation d'angle $\theta$ |
| K $\neq$ 1 | Homothétie<br>de rapport k | Homothétie<br>De rapport - k | Similitude directe à centre ,<br>de rapport k et d'angle $\theta$ |

**Propriétés**:

- ✓ Une similitude directe de centre $\Omega$, de rapport k et d'angle $\theta$ est une bijection et sa bijection réciproque est une similitude directe de même centre $\Omega$,de rapport $\dfrac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.
- ✓ La composée de deux similitudes directes de rapports respectifs k et k' et d'angles respectifs $\theta$ et $\theta$' est une similitude directe de rapport k.k' et d'angle $\theta+\theta$'.

# Similitudes

## II-3. Construction du centre d'une similitude directe :

1. Si s est donnée par son rapport k , son angle $\theta$ et un point A et son image A' alors $\Omega$ est l'unique point d'intersection des ensembles suivants :

$$(E) = \left\{ M, M \in P / \frac{MA'}{MA} = k \right\} \quad \text{et} \quad (E') = \left\{ M, M \in P / \left( \widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}} \right) \equiv \theta[2\pi] \right\}$$

2 Si s est donnée par deux points distincts A et B et leur images A' et B' alors le centre $\Omega$ de s est le points d'intersection des ensembles suivants :

$$(E) = \left\{ M, P \in P / \left( \widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}} \right) \equiv \theta[2\pi] \right\} \quad \text{et} \quad (E') = \left\{ M, P \in P / \left( \widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MB'}} \right) \equiv \theta[2\pi] \right\}$$

## II-5. Similitude directe et nombre complexe :

Soit a et b deux nombres complexes avec a non nul.

L'application $z \mapsto a.z + b$ est l'écriture complexe d'une :

- ✓ la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b , lorsque a = 1.
- ✓ la similitude directe de rapport $k = |a|$ , d'angle $\theta$ un argument de a et de centre $\Omega$ le point d'affixe $\omega$ tel que $\omega = a.\omega + b$ , lorsque $a \neq 1$.

# III- Similitudes indirectes

## III-1. Définition :

Une similitude indirecte est une transformation du plan qui multiplie les distances par un réel strictement positif et renverse les mesures des angles orientés.

**Conséquences :**

- ✓ Une similitude indirecte est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.
- ✓ Une similitude indirecte de rapport 1 est un antidéplacement.
- ✓ Une similitude indirecte qui n'est pas un antidéplacement admet un unique point invariant : son centre.
- ✓ Une similitude indirecte $\sigma$ est entièrement déterminée par la donnée de deux points distincts A et B et de leur image A' et B'. Le rapport de s est : $k = \frac{A'B'}{AB}$

## III-2. Propriétés

Soit $\sigma$ est une similitude indirecte de rapport $k \neq 1$ :

**Forme réduite** : $\sigma = H(\Omega, k) \circ S_\Delta = S_\Delta \circ H(\Omega, k)$ où $(\Delta)$ est l'axe de $\sigma$ , $\underline{\Omega \in \Delta}$.

Remarquons que : $\sigma \circ \sigma = H(\Omega, k^2)$ .

**Axe** : Soit M un point M distinct de $\Omega$ d'image $M'$ par $\sigma$,

- ✓ lorsque les points $\Omega$ , M et M' ne sont pas alignés , $(\Delta)$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right)$ .
- ✓ lorsque les points $\Omega$ , M et M' sont alignés tels que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ , $\Delta = (\Omega M)$.
- ✓ lorsque les points $\Omega$ , M et M' sont alignés tels que $\overrightarrow{\Omega M'} = -k\overrightarrow{\Omega M}$ , $\Delta$ est la perpendiculaire à la droite $(\Omega M)$ en $\Omega$.

**Composition** :

- ✓ la composée d'une similitude directe de rapport k et d'une similitude indirecte de rapport k' est une similitude indirecte de rapport kk'.
- ✓ la composée de deux similitudes indirectes de rapports k et k' est une similitude directe de rapport kk'.