Divisibilité dans Z
Exercices

EX1

Soit un entier $n \geq 0$. Montrer que $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

EX2

Soit le polynôme

$$P(x) = x^4 - 32x^3 + 186x^2 - 280x + 125.$$

1. Montrer que si n est un entier tel que $P(n) = 0$, alors n divise 125.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

EX3

1. Déterminer le reste modulo 3 de 2008 .
   En déduire le reste modulo 3 de 2008^{2007}.
2. Déterminer le reste modulo 5 de chacun des entiers 2011^{2007}, $(-2011)^{2007}$ et 2008^{2007}.

3

Montrer que pour tous entiers naturels n, p et q , $4^n + 4^p + 4^q \equiv 0 \pmod 3$.

EX4

1. Soit a un entier naturel.
   Montrer que 7 divise $(a^3 - 1)(a^4 + a)$.
2. Déterminer les entiers a tels que $a^{600} \equiv 1 \pmod 7$.

EX5

a. $x^2 \equiv 0 \pmod 4$.

b. $x^2 \equiv 2 \pmod 4$.

c. $x^2 \equiv 3 \pmod 4$.

EX6

Soit n un entier naturel.

1. Déterminer pour tout entier n de $\{0, 1, ..., 6\}$ le reste modulo 7 de 3^n.

2. Montrer que $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

3. a. Calculer le reste modulo 7 de 3^{1000}.

b. Quelle est le chiffre des unités de 3^{1000} ?

c. Soit c la somme des diviseurs du nombre 3^{1000}.
Quel est le reste modulo 7 de c.

EX7

1) Prouver les équivalences suivantes :

a) $3x \equiv 8[10] \Leftrightarrow x \equiv 6\ [10]$

b) $x^2 \equiv 6 \pmod 6 \Leftrightarrow x \equiv 4 \pmod{10}$ ou $x \equiv 6 \pmod{10}$

2) $n \in IN$, montrer l'équivalence

$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 \equiv 0 \pmod{10} \Leftrightarrow (n+1)^2 \equiv 6 \pmod{10}$.

3) Déterminer tous les multiples naturels de 10 inférieur à 5000 qui sont la sommes des carrés de trois entiers consécutifs.

EX8

A

1) a, b, c trois entiers relatifs tels que $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0\ [3]$

Montrer que $a + b + c \equiv 0\ [3]$.

2) Si a n'est pas un multiple de 3 démontrer que $a^3 \equiv -1\ [3]$ ou bien $a^3 \equiv 1\ [3]$

3) Montrer que si $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0\ [9]$

alors l'un au moins des nombre a, b, c est divisible par 3.

B

1) Etude de l'équation $a^2 + 9 = 2^n$ avec $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

a) Montrer que si a existe alors a est impair.

b) En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation n'a pas de solutions.

2) Etude de l'équation $a^2 + 9 = 3^n$ avec $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$; $3^n \equiv 1[4]$ ou $3^n \equiv 3[4]$.

b) Montrer que si a existe il est pair et n est pair.

c) On pose $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$ que l'équation n'admet pas de solutions.