Exercice n°1: **Répondre par « VRAI » ou « FAUX » :**

1) Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Alors : La matrice $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

2) Les deux matrices $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{pmatrix}$ commutent $(A\times B=B\times A)$.

3) On considère les deux matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

Alors : $A\times B=\begin{pmatrix}6 & 2 & -2\\ -1 & 1 & -9\end{pmatrix}$ et la matrice $B\times A$ n'est pas définie.

Exercice n°2:

1) On considère la matrice : $A=\begin{pmatrix}2 & a & 3\\ -3 & 1 & a\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; où $a\in$ ‹ .

Déterminer les valeurs de a pour les quelles la matrice A soit inversible.

2) Dans la suite de l'exercice on pose : $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et $B=4A-A^2$

a- Montrer que A est inversible.
b- Calculer : B *et* $A\times B$.
c- En déduire la matrice inverse A^{-1}.

Exercice n°3:

1) On donne les deux matrices : $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ -3 & 3 & -3\\ 5 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

a- Calculer dét(A) et dét(B).
b- En déduire que A est inversible.
c- Calculer : $A\times B$.
d- En déduire A^{-1} la matrice inverse de A.

2) On considère le système : (S) : $\begin{cases}x+y+z=1\\ 2x+y-z=6\\ x-2y-2z=1\end{cases}$

a- Ecrire (S) sous forme matricielle.
b- Résoudre alors le système (S).

EX 4

Compléter les phrases suivantes

1/soient A et B deux matrices d'ordre respective 3x4et 2x3

Alors la matrice BxA est d'ordre .....

2/l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ est la matrice $B=.....\begin{pmatrix}... & ...\\ ... & ...\end{pmatrix}$

3/on a A, B deux matrices d'ordre 4 tel que $A^2+3A=I_4$ alors $A^{-1}=$.....

EX 5

On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$

1) Calculer le déterminant de M et déduire que M est inversible

2) Montrer que $M^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 6\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

3) On considère le système linéaire suivant $S:\begin{cases}y+2z=5\\ -x+3y=2\\ x-2y+z=-2\end{cases}$

a) Donner l'écriture matricielle du système S

b) Résoudre alors dans IR^3 **le système S**

3. L'état initial est la matrice ligne $P_0 = (x_0 \ y_0)$
D'après l'énoncé, puisque « En 2008, 60 % de la population voyage avec la compagnie A », on en conclut que $x_0 = 0,6$, donc que $y_0 = 1 - 0,6 = 0,4$.
L'état initial est donc la matrice ligne $P_0 = (0,6 \ 0,4)$
Puisque $P_1 = P_0 \times M$, on calcule :

$$(x_1 \quad y_1) = (0,6 \quad 0,4) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$= (0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,1 \quad 0,6 \times 0,2 + 0,4 \times 0,9)$$

$$\boxed{= (0,52 \quad 0,48)}$$

4. La répartition prévisible du trafic entre les compagnies A et B en 2011 sera donnée par l'état probabiliste $P_3 = (x_3 \ y_3)$.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n = P_0 \times M^n$, on calcule $P_3 = P_0 \times M^3$
D'après la calculatrice, on obtient :

$$\boxed{P_3 = P_0 \times M^3 = (0,4248 \quad 0,5752)}$$

5. L'état stable S = $(x \ y)$ avec $x+y=1$ est solution de l'équation matricielle $S = S \times M$.
Les nombres x et y sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} (x \quad y) = (x \quad y) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,8x + 0,1y \\ y = 0,2x + 0,9y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,2x + 0,1y = 0 \\ 0,2x - 0,1y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Les deux premières lignes du système étant identiques, on résout :

$$\begin{cases} 0,2x - 0,1y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,2x - 0,1(1-x) = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,2x + 0,1x = 0,1 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3x = 0,1 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

L'état stable est donc $S = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}\right)$. Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, $\frac{1}{3}$ des habitants utilisera la compagnie A, contre $\frac{2}{3}$ pour la compagnie B.

6. Si on note $P_{n+1} = (x_{n+1} \quad y_{n+1})$ l'état probabiliste de l'année 2008+n+1,
L'égalité $P_{n+1} = P_n \times M$ se traduit par : $(x_{n+1} \quad y_{n+1}) = (x_n \quad y_n) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$, donc en particulier :
$x_{n+1} = 0,8x_n + 0,1y_n$.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n + y_n = 1$, on en déduit que :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 0,8x_n + 0,1(1-x_n) = 0,8x_n + 0,1y_n - 0,1 = \boxed{0,7x_n - 0,1}$

7. Puisque $-1 < 0,7 < 1$, on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,7^n = 0$ donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{4}{15} \times 0,7^n = 0$ et par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{4}{15} \times 0,7^n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \frac{1}{3}}$

Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, $\frac{1}{3}$ des habitants utilisera la compagnie A.

Mathématiques - jgcuaz