Nombres complexes

Eexercice 1

① Mettre sous forme algébrique chacun des nombres complexes :

$Z_1 = (2 + 3i)(-1 + 4i)$

$Z_2 = (1 + i)^2 \ (4 - 3i)$

$Z_3 = (2 + i)\ (1 + i)\ (2 - i)$

$Z_4 = (2 + i)^3$

$Z_5 = (2 + 3i)^2 \ (1 - 2i)$

Exercice 2

Mettre sous forme algébrique chacun des nombres complexes :

$Z_1 = \dfrac{1+i}{2+i}$ $\quad Z_2 = \dfrac{4}{3+i}$ $\quad Z_3 = \dfrac{4+5i}{2+7i}$ $\quad Z_4 = \dfrac{(1+i)(3+i)}{(2+i)(5-i)}$

$Z_5 = \dfrac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 3

1°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = 2$; $z_B = 1 + i$; et $z_C = 2 + 2i$

a) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment [AC]

b) Placer les points A, B, C et I dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

c) Montrer que ABC est isocèle et rectangle en B

2°) Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|iz - 2i + 1| = 1$

a) Ecrire une équation cartésienne de $\mathscr{C}$

b) Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle de centre I et dont on précisera le rayon

c) Vérifier que A, B, C appartiennent à ξ

Exercice4

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = 2$; $z_B = 3 + 3i$ et $z_C = -1 + i$

① a) placer sur une figure les points A, B et C

b) Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle

② a) Vérifier que : $3 + 4i = (2 + i)^2$

b) Résoudre dans C l'équation

$(z - (1 + 2i))^2 = 3 + 4i$

Exercice5

Soit u un nombre complexe différent de 1 et tel que $|u| = 1$

① On pose : $w = \dfrac{1 + u}{1 - u}$

Montrer que w est un imaginaire pur

② Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B et M d'affixes respectives 1, -1 et u

Montrer que M appartient au cercle de diamètre [AB]

aymenacademy.com

Exercice6

① Résoudre dans C l'équation $z^2 - (2 + i)z + 2i = 0$

② Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit M d'affixe z, M' d'affixe $\dfrac{z - i}{iz - 2i}$

a) Montrer que $OM' = \dfrac{AM}{BM}$

b) En déduire que longue M décrit la médiatrice de [AB], le point M' appartient à un cercle que l'on précisera

Exercice7

Soit z un complexe différent de -2i et $Z = \dfrac{z-4-2i}{z+2i}$

① On pose $z = x + yi$ avec x et y réel. Déterminer en fonction de x et y, la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

② Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer l'ensemble (P) des points M d'affixe z tel que : Z sont un nombre imaginaire pur

③ Soit A,B,C et D les points d'affixes respective : -2i , 4 – 2i , 4 + 2i et 1.

a) Quelle est la nature de ABC ?

b) Soit M d'affixe z et M' d'affixe Z. montrer que $DM'. AM = 4\sqrt{2}$

c) En déduire que si M varie sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 2, alors le point M ' varie sur un cercle $\mathscr{C}$' que l'on précisera.

SOLUTION

EX1

- $z_1 = (2+3i)(-1+4i) = -2+8i-3i+12i^2 = -2+5i-12 = -14+5i$
- $Z_2 = (1+i)^2(4-3i) = (1+2i+i^2)(4-3i) = 2i(4-3i) = 8i-6i^2 = 6+8i$
- $z_3 = (2+i)(1+i)(2-i) = (2+i)(2-i)(1+i) = (2^2-i^2)(1+i) = 5+5i$
- $z_4 = (2+i)^3 = 2^3 + 3x\,2^2 i + 3 \times 2 \times i^2 + i^3 = 8+12i-6-i = 2+11i$
- $z_5 = (2+3i)^2(1-2i) = (4+12i-9)(1-2i) = (-5+12i)(1-2i)$

  $= -5+10i+12i-24i^2 = 19+22i$

EX2

- $z_1 = \dfrac{1+i}{2+i} = \dfrac{(1+i)\ (2-i)}{(2+i)\ (2-i)} = \dfrac{2-i+2i+1}{2^2-i^2} = \dfrac{3+i}{5} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}i$
- $z_2 = \dfrac{4}{3+i} = \dfrac{4(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \dfrac{12-4i}{10} = \dfrac{6}{5}\ \dfrac{-2}{5}i$
- $z_3 = \dfrac{4+5i}{2+7i} = \dfrac{(4+5i)\ (2-7i)}{(2+7i)\ (2-7i)} = \dfrac{8-28i+10i-35i^2}{2^2-(7i)^2} = \dfrac{43-18i}{53}$

  $= \dfrac{43}{53} - \dfrac{18}{53}i$
- $z_4 = \dfrac{(1+i)\ (3+i)}{(2+i)\ (5-i)} = \dfrac{3+i+3i-1}{10-2i+5i+1} = \dfrac{2+4i}{11+3i} = \dfrac{(2+4i)\ (11-3i)}{(11)^2+(3)^2}$

EX3

①

b) $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-2i+4+2i}{2} = 2 = z_I$ d'où I = A * C

② a) $\mu = z_{\overline{BA}} = z_A - z_B = -2i - (1+i) = -2i - 1 - i = -1 - 3i$

$\mu' = z_{\overline{BC}} = z_C - z_B = 4 + 2i - 1 - i = 3 + i$

$BC = |3+i| = \sqrt{(3)^2+(1)^2} = \sqrt{10}$, $BA = |-1-3i| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

D'où BA = BC et par suite ABC est un triangle isocèle de sommet principal

B

③ a) On a : I = B * D

On a $Z_I = \frac{z_B + z_D}{2}$

$z_D = 2z_I - z_B = 4 - (1+i)$ $z_D = 3 - i$

b) $AB = \sqrt{10}$

$AD = |z_D - z_A| = |3 - i + 2i| = |3 + i| = \sqrt{(3)^2+(1)^2} = \sqrt{10}$

$BC = |z_C - z_B| = |4 + 2i - 1 - i| = |3 + i| = \sqrt{10}$

$CD = |3 - i - 4 - 2i| = |-1 - 3i| = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$