Série de revision espace,intégrale,etude de fonction

Exercice 1 (2 points)

Choisir la réponse correcte.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ est égale à :

   a) 0 b) 1 c) $+\infty$

2. Si ABC est un triangle équilatéral de coté 2 alors $\left\|\overrightarrow{AC}\wedge(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB})\right\|$ est égale à :

   a) 0 b) $4\sqrt{3}$ c) 4

Exercice 2 (6 points)

1. a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \tan\frac{\pi}{4}x$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$.

   b. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0,1]$ et calculer $(f^{-1})'(x)$.

   c. En déduire que pour tout $x\in[0,1]$ on a $f^{-1}(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

2. On pose pour tout réel $x\in[0,1]$, $\varphi(x) = f^{-1}(x^2)$

   a. Montrer que φ est dérivable sur $[0,1]$ et calculer sa fonction dérivée $\varphi'(x)$.

   b. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$.

3. Soit $J = \int_0^1 \frac{x^5}{(1+x^4)^2}dx$.

   Calculer J à l'aide d'une integration par parties.

Exercice n°3 (4pts)

Soit $g(x) = \tan x + (\tan x)^3$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

0.5 1) a) Dériver la fonction U : $x \mapsto \tan x$

1 b) Déterminer les primitives de g sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2) Soit f : $x \mapsto \dfrac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

0.5 a) Déterminer D_f .

0.5 b) Vérifier que pour tout x $\in D_f$, $f(x) = 2x^2 - 2x\sqrt{x^2 - 1}$

0.5 c) Montrer que f admet des primitives sur $]-\infty, -1[$.

1 d) Déterminer la primitive F de f sur $]-\infty, -1[$ telle que F(-2) = 2/3.

Exercice n°4 (6pts)

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par f(x) = 1+$\sqrt{x-1}$. Soit (ζ) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1 1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

0.5 b) Prouver que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer f '(x).

0.5 2) a) Dresser le tableau de variation de f

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat obtenu.

0.5 c) Tracer (ζ)

0.5 3) a) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on Déterminera. (On note f^{-1} la fonction réciproque de f).

0.5 b) Déterminer le domaine de continuité de f^{-1} et son sens de variation.

0.5 c) Calculer $f^{-1}(3)$.

0.5 d) Montrer que f^{-1} est dérivable en 3 et calculer $(f^{-1})'(3)$.

0.5 e) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à la courbe (ζ') de f^{-1} au point d'abscisse 3.

EX5

Répondre par vrai ou faux :

1) Soit A, B et C sont trois points du plan.

0.5 a) Si A, B et C sont trois points alignés alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

0.5 b) L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{6} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

2) Soit $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. On a alors :

0.5 a) $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

0.5 b) $(\vec{i} \wedge \vec{j}).\vec{k} = 0$

3) Soit A et B deux points distincts de l'espace.

0.5 a) L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = 0$ est une sphère

0.5 b) L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ est une droite.

EX6

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(3,2,4), B(0,3,5) et C(3,1,0).

1. Montrer que ABC est un triangle et calculer son aire.
2. Soit le point E(1,m+2,-1) où m est un réel.
   a. Calculer, en fonction de m, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AE}$
   b. En déduire la valeur de m pour que E soit un point du plan (ABC).
3. Dans la suite on prend m=2

   Soit H le projeté orthogonal du point E sur le plan (ABC).
   a. Calculer le volume du tétraèdre EABC.
   b. En déduire EH.
4. a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EH).
   c. Déterminer les coordonnées du point H.
5. Soit S la sphère dont une équation cartésienne est :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 10z + 15 = 0$$

   a. Déterminer les coordonnées du centre I et le rayon R de S.
   b. Vérifier que la droite (AI) est perpendiculaire au plan (ABC).
   c. Déterminer la position rélative du plan (ABC) et la sphère S.