Série des exercices avec correction
espace intégrale logarithme exponentielle

Exercice 1 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct (O, i, j, k) on donne les points A(1,0,1),B(-1,1,0),C(2,1,0) et $I_\alpha(\alpha, -\alpha, \alpha)$ où α est un réel.

1) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2) En déduire que les points A, B et C définissent un plan P.
3) En déduire que l'équation cartésienne de P est $y + z - 1 = 0$.
4) En déduire que les points A, B, C et I_α ne sont pas coplanaires.
5) Montrer que le volume du tétraèdre $ABCI_\alpha$ est indépendant de α.
6) Soit S_α la sphère de centre I_α et tangente au plan P au point H_α.
a) Déterminer les coordonnées de H_α.
b) Soit Δ l'ensemble des points H_α lorsque α décrit l'ensemble R.Déterminer la nature de Δ.

Exercice 2

Soit(o ;$\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) un ROND de l'éspace et A(1 ;2 ;3) ; B(2 ;3 ;4) ;C(-2 ;3 ;5)

1)a).Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b).En déduire que A ;B et C forment un seul plan d'équation cartésienne : x-5y+4z-3=0

2).Montrer que le plan Q :x+y+z-6=0est perpendiculaire à P suivant une droite à préciser.

3).soit S :{M(x ;y ;z) tel que $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+11=0$}

a).Montrer que S est la sphère de centre A et de rayon AB

b).Caractériser S ∩ P ; S ∩ Q et S ∩(AB).

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $g(x)=\ln x+2x^2-3$.

   Le tableau de variation de la fonction g est donné ci-dessous :

x	0		α		$+\infty$
g	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$	$+\infty$

   En utilisant une calculatrice on a obtenu $\alpha \approx 1{,}19$.

   Dresser le tableau donnant le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0,+\infty[$

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{\ln x}{x}+2x-5$.

   On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   a) Déterminer la limite de la fonction f à droite en 0.
   b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$, on a : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$
   b) En déduire le tableau de variations de f.
   c) Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel x supérieur ou égal à e.
   d) Montrer que la droite $D: y = 2x - 5$ est une asymptote à C_f
   e) Tracer la courbe représentative de f dans $(O,\vec{i},\vec{j})$

4. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $h(x)=(\ln x)^2$.

   a) Calculer la dérivée h' de h.

   b) En remarquant que pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$, on a : $f(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2}h'(x)+2x-5$, trouver une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   c) Déterminer l'aire en unités d'aire de la partie du plan délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\mathrm{e}$ et $x=\mathrm{e}^2$ (*On donnera la valeur exacte, puis une valeur décimale arrondie au dixième*).

Exercice 4

1).soit g la fonction définie sur]0. +∞[par g(x)=1-x^2-ln(x)

a).Dresser le tableau de variation de g sur]0. +∞[

b).calculer g(1) en déduire le signe de g(x) *sur*]0. +∞[

2).Soit f la fonction définie sur]0. +∞[par f(x)=$\frac{\ln(x)}{x}$ −x et ℓ sa courbe dans un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$

a).montrer que f'(x)=$\frac{g(x)}{x^2}$

b). Dresser le tableau de variation de f sur]0. +∞[

3).a).montrer que D : y=-x est une asymptote à ℓ

b).Etudier la position de ℓ et D

c).Tracer D et ℓ .

4). Calculer l'aire du domaine du plan limité par les droites d'équations :x=1 ;x=e et la droite D et la courbe ℓ .

Exercice 5:

Soit f la fonction définie sur [0, +∞ [par $f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{\ln(x)}{x}} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.
2) Montrer que f est dérivable à droite en 0.
3) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$
4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ .Interpréter.
5) Soit g la fonction définie sur]0, +∞ [par $g(x)=1+\frac{1}{x}-\frac{\ln(x)}{x}$.
a) Etudier le sens de variation de g
b) En déduire le signe de g
6) a) Montrer que pour tout réel $x>0, f'(x)=g(x)e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.
b) En déduire le tableau de variation de f
7) Tracer $\mathcal{C}$.

Solution

exercice 1

Exercice 1

1) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-3\\-3\end{pmatrix}$

2) On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés donc ils définissent un plan unique P.

3) On sait que le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal de P donc l'équation de P est -3y – 3z + d = 0 or le point A(1, 0,1) appartient à P donc -3 + d = 0 donc d = 3 d'où P : y + z – 1 = 0.

4) On a $-\alpha+\alpha-1=-1\neq 0$ donc $I_\alpha\notin P$ donc les points A, B, C et I_α ne sont pas coplanaires.

5) Soit V le volume du tétraèdre $ABCI_\alpha$ alors $V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AI_\alpha}\right|$ or $\overrightarrow{AI_\alpha}\begin{pmatrix}\alpha-1\\-\alpha\\\alpha-1\end{pmatrix}$ donc $V=\frac{1}{6}\left|3\alpha-3\alpha+3\right|$

d'où $V=\frac{1}{2}$

6) a) $H_\alpha(x, y, z)$ est le projeté orthogonal de I_α sur P $\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{H_\alpha I_\alpha} \text{ et } \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires}\\ H_\alpha\in P\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\alpha-x=0\\-\alpha-y=-3t\\\alpha-z=-3t\\y+z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=-\alpha+3t\\z=\alpha+3t\\-\alpha+3t+\alpha+3t-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=-\alpha+\frac{1}{2}\\z=\alpha+\frac{1}{2}\\t=\frac{1}{6}\end{cases}\Leftrightarrow H_\alpha\left(\alpha,-\alpha+\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right)$$

b) $M(x, y, z)\in\Delta\Leftrightarrow$ il existe un réel α tel que $\begin{cases}x=\alpha\\y=\frac{1}{2}-\alpha\\z=\frac{1}{2}+\alpha\end{cases}$ donc Δ est la droite passant par le point $D\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

Exercice 2

1).a). $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$.

b). $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ signifie $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires signifie

2).$\overrightarrow{N_P}.\overrightarrow{N_Q}$=1-5+4=0 signifie $\overrightarrow{N_P} \perp \overrightarrow{N_Q}$ signifie P⊥Q.

.On remarque que A∈P∩Q et C∈P∩Q d'où P∩Q=(AC).

3).a).S : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3=(\sqrt{3})^2$ d'où S est la sphère de centre A(1,2,3) et de rayon $\sqrt{3}$=AB

b).i). S∩P =le cercle ζ de centre A et de rayon $\sqrt{3}$(car A∈P)(Pétant le plan de ζ)

ii). S∩Q= le cercle ζ' de centre A et de rayon$\sqrt{3}$(car A∈Q)(Qétant le plan de ζ')

iii).On a A est le centre de S et B∈S donc S∩(AB)={B ;E} où[BE] est un diamètre de S. on trouvera E(0 ;1 ;2).

exercice 3

1-

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2- a) $\lim_{0^+} f = +\infty$

b) $\lim_{+\infty} f = +\infty$

3) a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} + 2 = \frac{\ln x + 2x^2 - 3}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

b) signe$(f'(x))$ = signe$(g(x))$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

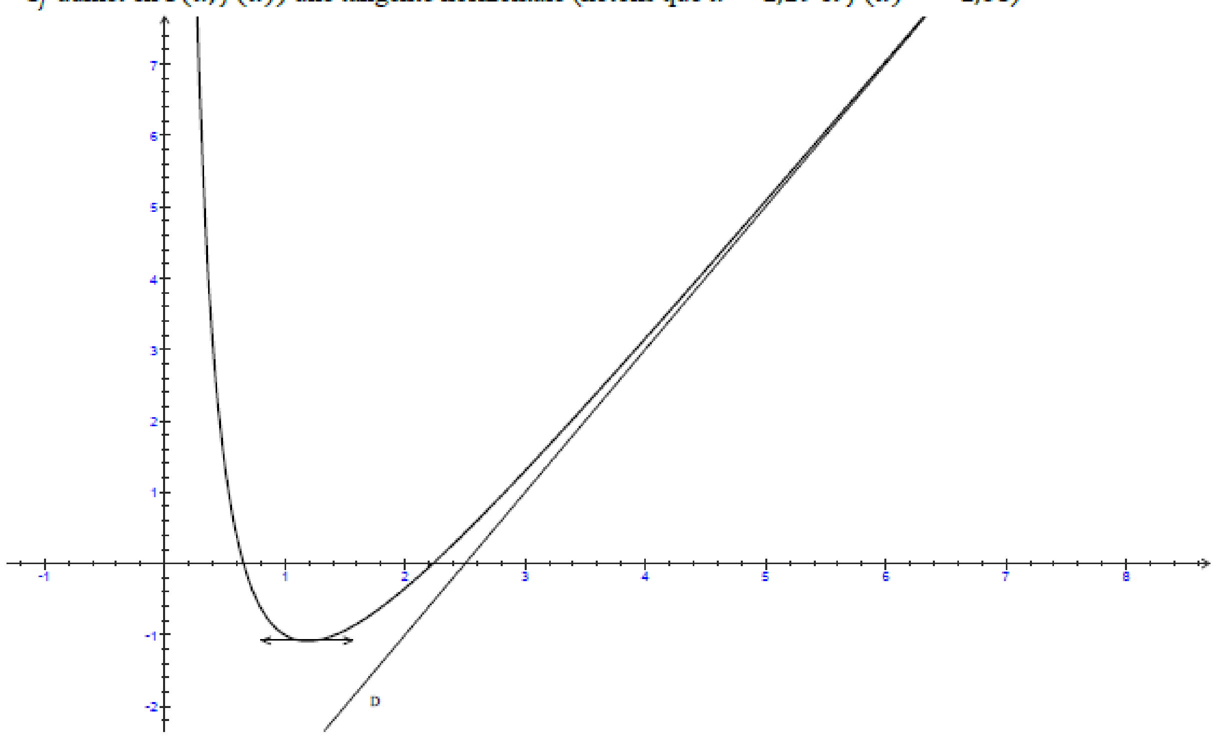
c) $e \in [\alpha, +\infty[$ et f est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$, alors si $x \geq \alpha$ alors $f(x) \geq f(\alpha)$

or $f(\alpha) = \frac{2}{e} - \frac{1}{e} + 2e - 5 = 2e + \frac{1}{e} - 5 \approx 0{,}7 > 0$ donc $f(x) > 0$

d) $\lim_{+\infty}[f(x) - (2x-5)] = \lim_{+\infty} \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} = 0 - 0 = 0$ donc $D: y = 2x - 5$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

e) * $(O, \vec{j})$: $x = 0$ est une asymptote verticale à C_f

* C_f admet en $S(\alpha, f(\alpha))$ une tangente horizontale (notons que $\alpha \approx 1{,}19$ et $f(\alpha) \approx -1{,}08$)



4- a) h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $h'(x) = 2\frac{1}{x}\ln x = 2\frac{\ln x}{x}$

1).a).g'(x)=-2x-$\frac{1}{x}$ <0

$\lim_{0^+} g=+\infty$; $\lim_{+\infty} g=-\infty$;

x	0		+∞
g'(x)		−	
g	+∞	↘	-∞

b).g(1)=1-1²-ln(1)=0-0=0

Signe de g(x) :

x	0	1	+∞
g(x)	+	0	-

2).a).f'(x)=$\frac{\frac{1}{x}x-\ln(x)}{x^2}$-1=$\frac{1-\ln(x)-x^2}{x^2}$ =$\frac{g(x)}{x^2}$

b).signe(f(x))=signe(g(x)) (car x^2>0)et $\lim_{0^+} f=-\infty$; $\lim_{+\infty} f=-\infty$;et f(1)=-1

x	0		1		+∞
f '(x)		+	0	-	
f	-∞	↗	-1	↘	-∞

3).a).$\lim_{x\to+\infty} f(x)$- (-x) = $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ = 0d'où D :y = - x est une asymptote à ℓ au voisinage de +∞

b).On a f(x)-(-x)=$\frac{\ln(x)}{x}$ d'où :

exercice 5 :

1) Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x=0$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{x}}=0$ donc $\lim\limits_{0^+} f=0=f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{x}}=0$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$

3) Puisque $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}}=1$ donc $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}}=1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x)\left(\dfrac{e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1}{\frac{\ln(x)}{x}}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1}{\frac{\ln(x)}{x}}\right)$

$=\lim\limits_{X\to 0^+}\dfrac{e^X-1}{X}=1$ où on a posé $X=\dfrac{\ln(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x)=+\infty$.

Interprétation : $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$.

5) a) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\ln(x)-\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln(x)-2}{x^2}$

x	0		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	||	-	0	+	
Sens de variation de g	||	décroissante	$\dfrac{e^2-1}{e^2}$	croissante	

b) $\dfrac{e^2-1}{e^2}$ est le minimum de g sur l'intervalle$]0,+\infty[$ donc g est strictement positive sur l'intervalle$]0,+\infty[$

6) a) Soit $x>0$ alors $f'(x)=e^{\frac{\ln(x)}{x}}+x\left(-\dfrac{1}{x^2}\ln(x)+\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{\ln(x)}{x}}=e^{\frac{\ln(x)}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x}\ln(x)+\dfrac{1}{x}\right)=g(x)e^{\frac{\ln(x)}{x}}$

b)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

exercice4

1).a).$g'(x)=-2x-\frac{1}{x}<0$

$\lim_{0^+} g=+\infty$; $\lim_{+\infty} g=-\infty$;

x	0		+∞
g'(x)		−	
g	+∞	↘	−∞

b).$g(1)=1-1^2-\ln(1)=0-0=0$

Signe de g(x) :

x	0		1		+∞
g(x)		+	0	-	

2).a).$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln(x)}{x^2}-1=\frac{1-\ln(x)-x^2}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$

b).signe(f(x))=signe(g(x)) (car $x^2>0$)et $\lim_{0^+} f=-\infty$; $\lim_{+\infty} f=-\infty$;et f(1)=-1

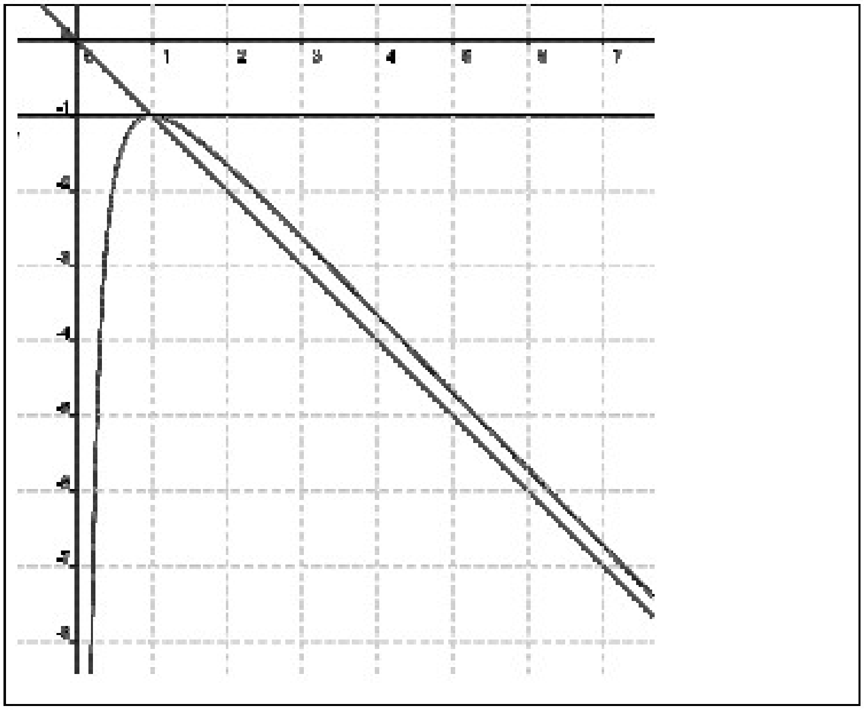
x	0		1		+∞
f '(x)		+	0	-	
f	-∞	↗	-1	↘	-∞

3).a).$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$d'où D :y = - x est une asymptote à ℓ au voisinage de +∞

b).On a $f(x)-(-x)=\frac{\ln(x)}{x}$ d'où :

x		0	1	$+\infty$
f(x)-(-x)		-	0	+
Position de ℓ et D		ℓ est en dessous de D	$\ell \cap D$	ℓ est en dessus de D

c).



4).$\mathcal{A}=\int_1^e |f(x)-(-x)|\,dx=\int_1^e \left|\frac{\ln(x)}{x}\right|dx=\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx=\left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e=\frac{1}{2}$ u.a

<u>EX 3 :(5points) :</u>

1). $\lim_{x\to0^+} h(x)=\lim_{x\to0^+} x\ln(x)=0=h(0)$ signifie h est continue à droite en 0.

2).a).$\lim_{x\to0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ signefie h n'est pas dérivable à droite en 0.

b).La courbe Γ de h admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente parallèle à $(O,\vec{j})$

3).a). $\forall$x>0 on a h'(x)=ln(x)+1

h'(x) >0 signifie ln(x)+1 >0 signifie ln(x) > -1 signifie x> e^{-1}

_ d'autre part on a $\lim_{+\infty} h=+\infty$ et h(e^{-1})=$-e^{-1}$