Dérivation

Exercice 1 :

Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x^3 + x - 1$

1) Dresser le tableau de variation de g. Déterminer g (IR)
2) Montrer que g est une bijection de IR sur IR
3) Déduire que l'équation g(x) =0 admet dans IR une unique solution α et que $\alpha \in \left]0,5;\ 0,6\right[$

Exercice2 :

Soit f la fonction sur IR par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

1) Etudier les variations de f
2) a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0
   b) Etudier la position de C_f et T.
3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0,1]$
   a) Montrer que g est une bijection de $[0,1]$ sur lui-même.
   b) Expliciter g^{-1}.
   c) Calculer pour tout $x \in [0,1], (g^{-1})'(x)$

Exercice3 :

Soit la fonction g définie par $g(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ pour tout $x \in IR$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de g.
   c) En déduire que pour tout $x \in IR$;.
2) Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$
   a) Montrer que pour tout $x \in IR$; $f'(x) = g(x)$
   b) Etudier les variations de f.
3) Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.
4) Déterminer le domaine de continuité et de dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1} de f ainsi que son sens de variation.
5) a) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$
   b) Calculer $f^{-1}(2)$ puis calculer $(f^{-1})'(2)$ de deux manières différentes puis en déduire la construction de la tangente à $C_{f^{-1}}$ au point $A(2,\ f^{-1}(2))$.

3. L'état initial est la matrice ligne $P_0 = (x_0\ y_0)$

D'après l'énoncé, puisque « En 2008, 60 % de la population voyage avec la compagnie A », on en conclut que $x_0 = 0,6$, donc que $y_0 = 1 - 0,6 = 0,4$.

L'état initial est donc la matrice ligne $P_0 = (0,6\ \ 0,4)$

Puisque $P_1 = P_0 \times M$, on calcule :

$$(x_1 \quad y_1) = (0,6 \quad 0,4) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$= (0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,1 \quad 0,6 \times 0,2 + 0,4 \times 0,9)$$

$$\boxed{= (0,52 \quad 0,48)}$$

4. La répartition prévisible du trafic entre les compagnies A et B en 2011 sera donnée par l'état probabiliste $P_3 = (x_3\ y_3)$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n = P_0 \times M^n$, on calcule $P_3 = P_0 \times M^3$

D'après la calculatrice, on obtient :

$$\boxed{P_3 = P_0 \times M^3 = (0,4248 \quad 0,5752)}$$

5. L'état stable S = $(x\ y)$ avec $x+y=1$ est solution de l'équation matricielle $S = S \times M$.

Les nombres x et y sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} (x \quad y) = (x \quad y) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,8x + 0,1y \\ y = 0,2x + 0,9y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,2x + 0,1y = 0 \\ 0,2x - 0,1y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Les deux premières lignes du système étant identiques, on résout :

$$\begin{cases} 0,2x - 0,1y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,2x - 0,1(1-x) = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,2x + 0,1x = 0,1 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3x = 0,1 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

L'état stable est donc $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, $\frac{1}{3}$ des habitants utilisera la compagnie A, contre $\frac{2}{3}$ pour la compagnie B.

6. Si on note $P_{n+1} = (x_{n+1} \quad y_{n+1})$ l'état probabiliste de l'année 2008+n+1,

L'égalité $P_{n+1} = P_n \times M$ se traduit par : $(x_{n+1} \quad y_{n+1}) = (x_n \quad y_n) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$, donc en particulier :

$x_{n+1} = 0,8x_n + 0,1y_n$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n + y_n = 1$, on en déduit que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 0,8x_n + 0,1(1 - x_n) = 0,8x_n + 0,1y_n - 0,1 = \boxed{0,7x_n - 0,1}$

7. Puisque $-1 < 0,7 < 1$, on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,7^n = 0$ donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{4}{15} \times 0,7^n = 0$ et par somme

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{4}{15} \times 0,7^n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \frac{1}{3}}$

Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, $\frac{1}{3}$ des habitants utilisera la compagnie A.