Exercice 1

Les fonctions affines par morceaux f et g sont définies sur l'intervalle $[-1\,;5]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 0 \\ -x+3 & \text{si } 0<x\leqslant 3 \\ x-3 & \text{si } 3<x\leqslant 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 1 \\ -\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} & \text{si } 1<x\leqslant 5 \end{cases}$$

1) Tracer séparément les fonctions f et g

2) Calculer les intégrales I et J sur $[-1\,;5]$ de f et g.

3) En déduire les intégrales sur $[-1\,;5]$ des fonction $f+4g$ et $5f-2g$

Exercice 2

Prouver dans les cas suivantes que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I.

1) $f(x)=\dfrac{2(x^4-1)}{x^3}$; $F(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$; $I=]0;+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$; $F(x)=x-\ln(1+e^x)$; $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$; $F(x)=\ln(\ln x)$; $I=]1;+\infty[$

4) $f(x)=\cos x-x\sin x$; $F(x)=x\cos x$; $I=\mathbb{R}$

Exercice 3

Montrer que les fonction F et G sont deux primitives de la même fonction f sur un intervalle I. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

$$F(x)=\frac{x^2+3x-1}{x-1}\ ;\quad G(x)=\frac{x^2+7x-5}{x-1}\ ;\quad I=]1;+\infty[.$$

Exercice 4

Linéarité de la primitive

1) $f(x)=x^4-4x^3+x^2-4x+3,\quad I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{3},\quad I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=1-\dfrac{1}{x^3},\quad I=]0;+\infty[$

4) $f(x)=-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{4}{x^2}-1,\quad I=]0;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{4}{x}+2e^x,\quad I=]0;+\infty[$

Exercice 5

Forme $u'u^n$

1) $f(x) = (x+2)^3, \quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 2x(1+x^2)^5, \quad I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \dfrac{(x-1)^5}{3}, \quad I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = 2x(3x^2-1)^3, \quad I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sin x \cos x, \quad I = \mathbb{R}$

Exercice 6

Forme $\dfrac{u'}{u}$

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}, \quad I =]4; +\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}, \quad I =]-\infty; 4[$

3) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}, \quad I =]0; 1[$

Exercice 7

Forme $\dfrac{u'}{u^n}$, $n \geqslant 2$

1) $f(x) = \dfrac{2}{(x+4)^3}, \quad I =]-4; +\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}, \quad I = \left]-\infty; \dfrac{1}{3}\right[$

3) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}, \quad I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}, \quad I =]-1; 3[$

5) $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3+8)^3}, \quad I =]-2; +\infty[$

Exercice 8

Forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

1) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}, \quad I = \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

2) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad I =]1; +\infty[$

Exercice 9

Forme $u'e^u$

1) $f(x) = e^{-x+1}, \quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 2e^{3x-2}, \quad I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}, \quad I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \sin x \times e^{\cos x}, \quad I = \mathbb{R}$

Exercice 10

Forme $u(ax+b)$

1) $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x), \quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 3\cos x - 2\sin(2x) + 1, \quad I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right), \quad I = \mathbb{R}$

Soit g une fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.Dans le graphique ci –joint $(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

*$(\mathcal{C})$ admet au point A(1,-2) une tangente horizontale.

*$(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe (O ; $\vec{\jmath}$) au voisinage de

($+\infty$).

1)Par une lecture graphique :

a) Déterminer g(1) ;g'(1) ;$\lim_{x\to+\infty} g(x) et\ \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$.

b)Résoudre dans IR l'inéquation g'(x) $\geq$0.

c)Justifier que la restriction h de g à l'intervalle [1 ; $+\infty$ [admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2)On suppose qu'il existe trois réels a,b et c tel que

g(x)= a x $\ln(x^2)$ + b x + c $\quad \forall\, x \in]0;+\infty[$.

a)Montrer que b+c=-2 ; 2a+b=0 et c=0.

b)En déduire que g(x)=2xln(x)-2x $\forall\, x \in]0;+\infty[$.

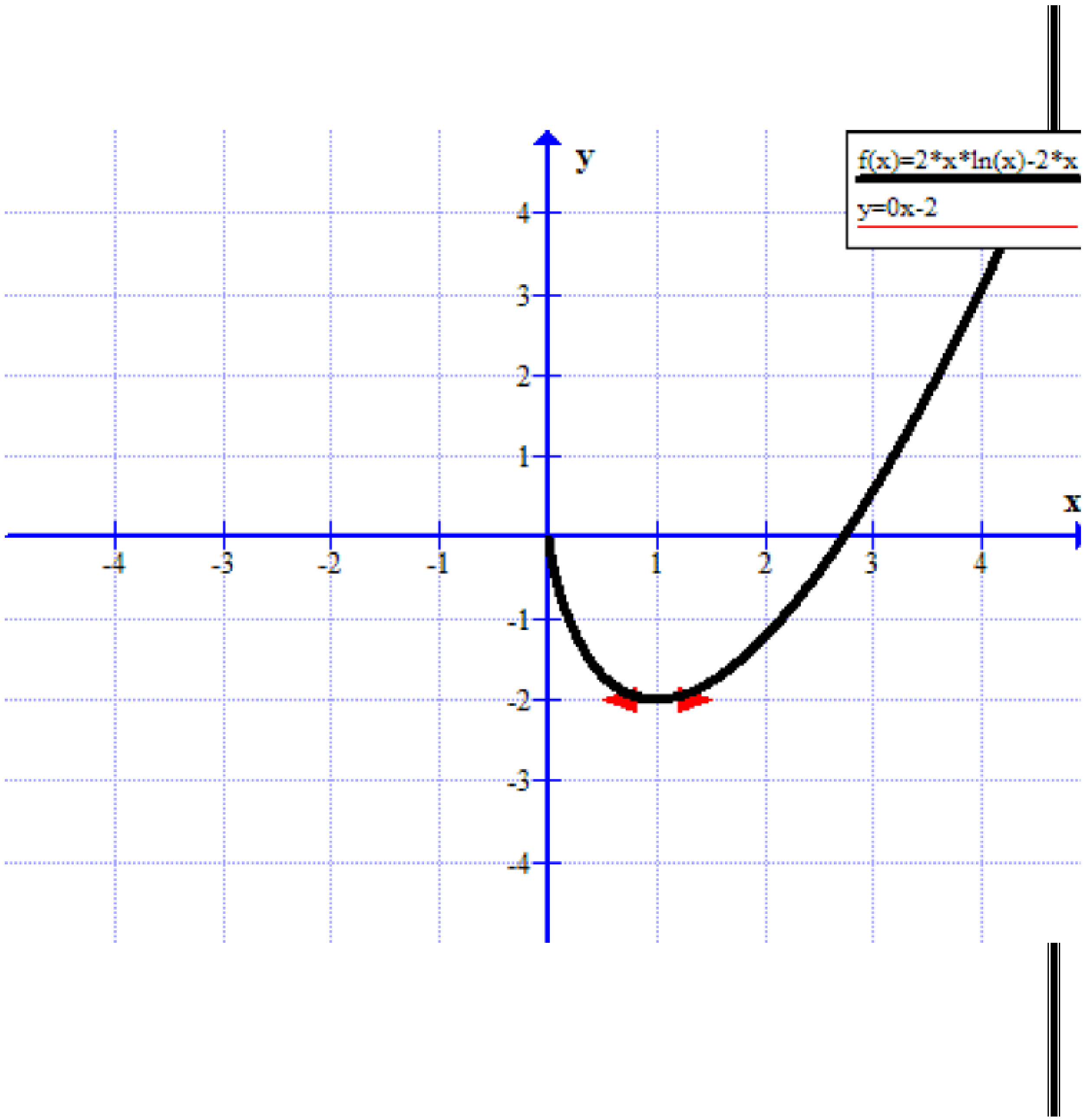
c)Résoudre dans$]0;+\infty[$ l'équation g(x)=x.

3)Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ de h^{-1} dans le même repère.

4)A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_e^{\sqrt{e^3}} x\ln(x)dx$.

5)Soit A_1 l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$,l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x= e et x=$\sqrt{e^3}$.

a)Montrer que A_1=$\frac{1}{2}e^2$.



y
x
f(x)=2*x*ln(x)-2*x
y=0x-2
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4