Série d'exercices N° 2 ******************** *Bac Mathématiques* ** *************
***************** *****Mr Aymen oueslati /27677722* ************************

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur IR_+ par $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé

1)Dresser le tableau de variation de f

2)Montrer que f est une bijection de IR_+ sur un intervalle J que l'on précisera

3)Construire dans le même repère les courbes C_f et C_f^{-1}

4)soit la fonction g définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = f(\tan(x))$ si $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $g(\frac{\pi}{2}) = -1$

a)Montrer que g est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

b)Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $g(x) = \cos(2x)$

c)Montrer que g réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$

d)Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$

e)Soit $G(x) = g^{-1}(-x) + g^{-1}(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Montrer que G est dérivable sur $]-1,1[$ et préciser $G'(x)$

f)Montrer que $G(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$ .Que peut on conclure pou $C_{g^{-1}}$?

Exercice 2

Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe on donne le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur IR et vérifiant $f(0) = \frac{1}{4}$ et pour tout $x \in [-1, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

1)Justifier que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[-1, 1]$

2)Soit la suite réelle (U_n) définie sur IR par $U_0 = \frac{1}{4}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a)Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n \in [-1, 1]$

b)Montrer que pour tout n , $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

c)Montrer que (U_n) est convergente et déterminer sa limite

3)Soit $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$ pour tout $n \in IN$

Montrer que pour tout n , $f(\frac{1}{n}) \leq V_n \leq f(\frac{1}{n^2})$ et déduire la limite de (V_n)

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit l'application f de P \{A} dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' où

$z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$ *et* soit les points A et B d'affixes respectives 1 et 1 - 2i

1)Montrer que f admet deux points invariants I et J qu'on précisera les affixes

2)Montrer que pour tout M $\neq$A , f o f (M) = M

3)a)Montrer que OM' = $\frac{BM}{AM}$ et déduire l'image de la médiatrice de [AB] par f

b)Montrer que $((\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})[2\pi]$ et déduire l'image du cercle de diamètre [AB] privé de A

4)a)Calculer (z'-1)(z-1) et déduire que AM'.AM = 2 et $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

b)Soit M un point d'affixe $1 + e^{i\alpha}$ où α est un réel donné , construire son image M' par f

Exercice 4

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta) : iz^2 + e^{i2\theta}z + i(e^{i2\theta} + 1) = 0$, ou $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Et soit z_1 *et* z_2 les solutions de l'équation (E_θ) .

1) **a.** Montrer que : $1 + e^{i2\theta} = 2cos\theta e^{i\theta}$.

b. Sans calculer z_1 *et* z_2 , montrer que arg $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) \equiv \theta + \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

c. Déterminer la valeur de θ pour que $z_1 + z_2 = -1$.

2) **a.** Calculer $(e^{i2\theta} + 2)^2$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit A et M les points d'affixe respectives $z_A = -i$ *et* $z_M = i(1 + e^{i2\theta})$

a. Ecrire z_M sous forme trigonométrique .

b. Déterminer θ pour que le triangle OAM est un triangle isocèle en O .

c. Déterminer et construire l'ensemble des points M quand θ *varie dans* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$