

## Cours de coniques

### Définition :

Soit  $D$  une droite et  $F$  un point n'appartenant pas à  $D$  et  $e$  un réel strictement positif

Pour tout point  $M$  du plan  $H$  sont projeté orthogonal sur  $D$

On appelle conique l'ensemble des point  $M$  du plan tels que  $MF/MH=e$

### Remarque1

Si  $e=1$  la conique est appelé parabole de foyer  $F$ , de directrice  $D$

Si  $e<1$  la conique est une ellipse

Si  $e>1$  la conique est une hyperbole

## Foyer et directrice

Soit  $R=(O; \vec{i}; \vec{j})$  un repere orthonormé du plan

Soit  $R'=(F; \vec{i}; \vec{j})$  un repere tel que  $D(F; \vec{i})$  est perpendiculaire à  $D$

Puisque  $(F; \vec{j}) // D$  soit alors une équation de  $D$  :  $x=p$

Pour tout point  $M(x; y)$  dans  $R'$  on a :  $MF^2=x^2+y^2$

$H$  étant le projeté orthogonal de  $M$  sur  $D$  donc  $MH=|x-p|$

$$MF/MH=e \Leftrightarrow x^2+y^2=e^2(x-p)^2$$

$$\Leftrightarrow (1-e^2)x^2+2e^2px+y^2-e^2p^2=0 \quad (1)$$

## discussion

1) si  $e=0$  alors  $x^2+y^2=0$  donc  $x=y=0$  d'où  $M=F$

si  $p=0$  donc  $F \in D$  cas à écarter

2) si  $e=1$  alors  $y^2+2px-p^2=0$

$$\Leftrightarrow y^2+2p(x-p/2)=0 \quad (E)$$

Soit alors  $\Omega(p/2; 0)$  dans le repere  $R''(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$  (1)  $\Leftrightarrow Y^2+2pX=0$

$M(x; y)$  dans  $R$  et  $M(X; Y)$  dans  $R''$

$$\Leftrightarrow X = -\frac{1}{2p} Y^2 \text{ qui est une parabole}$$

On dit que  $-p$  est le paramètre de cette parabole (P)

Dans le repère  $R'$  le sommet de cette parabole est le point  $S(p/2 ; 0)$  située dans le demi plan

De bord la tangente au sommet d'équation  $x=p/2$  et qui contient F (ne contient pas D)

F est appelé le foyer et D la directrice

**REMARQUE** Dans l'équation (E) on remarque si S est le milieu de [FH] alors  $S(p/2 ; 0)$  On remarque que  $S \in (P)$

3) si  $e \neq 1$

$$\text{dans le repère } R \quad (1) \Leftrightarrow (1-e^2)\left(x + \frac{e^2 p}{1-e^2}\right)^2 + y^2 \frac{(ep)^2}{1-e^2} = 0$$

soit  $\Omega\left(-\frac{e^2 p}{1-e^2}; 0\right)$  un point  $M(x ; y)$  dans R et  $M(X ; Y)$  dans le repère  $R_1 = (\Omega ; \vec{i}; \vec{j})$

$$\begin{cases} X = x + \frac{e^2 p}{1-e^2} \\ Y = y \end{cases} \quad (4)$$

$$(1) \Leftrightarrow (1-e^2)X^2 + Y^2 - (ep)^2 / (1-e^2) = 0$$

Si  $e < 1$

$$[(1-e^2)/(ep)^2] X^2 + (1-e^2)/(ep)^2 = 1$$

Ellipse de centre  $\Omega$

Si  $e > 1$

$$[(1-e^2)^2/(ep)^2] X^2 - \frac{e^2-1}{(ep)^2} Y^2 = 1$$

Hyperbole de centre  $\Omega$  et d'axe transverse  $(\Omega ; \vec{i})$

$$\text{Si } e < 1 \text{ on pose } a^2 = \frac{(ep)^2}{(1-e^2)^2} \text{ et } b^2 = \frac{(ep)^2}{(1-e^2)} \text{ donc } (1) \Leftrightarrow x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \quad (2)$$

$$\text{Si } e > 1 \text{ on pose } a^2 = \frac{(ep)^2}{e^2-1} \text{ et } b^2 = \frac{(ep)^2}{e^2-1} \text{ donc } (1) \Leftrightarrow x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 \quad (3)$$

**CALCUL DE L'EXCENTRICITE**

Si  $e < 1$  (ellipse)

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \Leftrightarrow e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \text{ donc } 1 \geq \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow a^2 \geq b^2 \text{ or } e \neq 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2$$

Donc il existe un réel c tel que  $c^2 = a^2 - b^2$

$$\text{Mais puisque } b^2/a^2 = 1 - e^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = e^2 a^2 \Leftrightarrow c^2 = e^2 a^2 \Leftrightarrow e = c/a$$

On a  $b^2 = \frac{e^2 p^2}{1-e^2} \Leftrightarrow b^2 \left( \frac{a^2}{c^2} - 1 \right) = p^2$  or  $a^2 - b^2 = c^2 \Leftrightarrow p^2 = b^4/c^2 \Leftrightarrow p = b^2/c$  ou  $p = -b^2/c$

Dans le repère  $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$  et vu la relation (4) coordonnées des points correspondant  $(e^2 p / (1-e^2); 0)$

$\frac{e^2 p}{1-e^2} = \frac{b^2}{p}$  or  $p = \frac{b^2}{c} \Leftrightarrow c = \frac{b^2}{p}$  donc les points sont d'abscisses  $c$  et  $-c$

La droite correspondante au point F s'abscisse  $c$  est

$X = p + c$

$x = \frac{b^2}{c} + c = \frac{b^2 + c^2}{c}$  alors D :  $x = a^2/c$  directrice associée à F

Celle associée à F' est D' :  $x = -a^2/c$

Les points A(a ; 0) A'(-a ; 0) sont les sommets de l'ellipse situés sur D( $\Omega; \vec{i}$ )

F et F' sont les foyers

Puisque  $e = c/a$  et que  $e < 1$  alors  $0 < c < a < a^2/c$

Donc D et D' ne coupent jamais l'ellipse et que l'ellipse est située dans la bande [D ; D']

Pour  $e > 1$  (hyperbole) donc  $0 < a^2/c < a < c$

L'hyperbole est située en dehors de la bande [D ; D']

## REMARQUE

l'écriture  $MF/MH = e$  est équivalente à  $\vec{MF} + e\vec{MH} = \vec{0}$  ou  $\vec{MF} - e\vec{MH} = \vec{0}$

dans le cas  $e \neq 1$  M est le barycentre de (F ; 1) et (H ; e) ou M est le barycentre de (F ; 1)

et (H ; -e)

H étant le projeté orthogonal de M sur la directrice D

si  $e = 1$  l'égalité  $\vec{MF} = \vec{MH}$  est impossible car on aura F=H mais H ∈ D donc F ∈ D (absurde)

l'égalité  $\vec{MF} + \vec{MH} = \vec{0}$  signifie que M est le milieu de [FH]

d'où dans le cas d'une parabole l'axe focal rencontre la parabole en un seul point

qui est le sommet

si  $e \neq 1$  (ellipse ou hyperbole) l'axe focal coupe la conique en deux points symétriques

par rapport au centre de la conique

## RESUME

equation  $x^2/a^2+y^2/b^2=1$  (ellipse)

elements de l'ellipse	c	Exentricié(e)	foyer	Directrice associée
$a>b>0$	$\sqrt{a^2 - b^2}$	$c/a$	$F(c ; 0)$	$D : x=a^2/c$
$b>a>0$	$\sqrt{b^2 - a^2}$	$c/b$	$F(0 ; c)$	$D : y=b^2/c$

Equation  $x^2/a^2-y^2/b^2=1$  (yperbole)

c	Exentricité(e)	foyer	Directrice associée
$\sqrt{a^2 + b^2}$	$c/a$	$F(c ; 0)$	$D : x=a^2/c$

Pour l'équation  $-x^2/a^2+y^2/b^2=1$  (evident)

**REMARQUE** Soit  $M(x ; y)$  dans on R.O.N  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  la fonction  $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$   $x \in [-a ; a]$

On a :  $f'(x)=\frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$  pour  $x \in ]-a ; a[$

F decroit strictement sur  $]0 ; a[$  de  $b$  à  $0$

La tangente à la courbe au point d'abscisse  $c$  est

$T : y = \frac{c}{a}(x - c) + \frac{b^2}{a}$  cette droite coupe l'axe focal au pont de coordonnées  $(a^2/c ; 0)$

C'est-à-dire au point  $K$  projeté orthogonal de  $F$  sur la directrice  $D$

En remplaçant  $x$  par  $(-x)$  et  $y$  par  $(-y)$  on remarque que l'axe focal ; l'axe non focal

Sont des axes de symétries ainsi que leur intersection centre de l'ellipse est un centre

De symétrie

## POUR L'HYPERBOLE

Soit  $g(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$  pour  $x \in \mathbb{R} - [-a ; a]$

Par raison de symetrie il suffit d'étudier  $g$  sur  $[a ; +\infty[$

On a alors  $g'(x)=\frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}$  donc  $g$  est strictement croissante

La courbe admet la meme tangente (T)

Asymptote oblique puisque la limite de  $g(x)/x$  quand  $x \rightarrow +\infty$  est  $b/a$

Et que limite de  $g(x)-(b/a)x$  quand  $x \rightarrow +\infty$  est 0 alors la droite  $\Delta : y=(b/a)x$  est une

Asymptote à la courbe au voisinage de  $+\infty$

Pour  $x > 0$  on a :  $g(x)-(b/a)x < 0$  donc l'hyperbole est au dessus de  $\Delta$

Pour des raisons de symétrie la droite  $\Delta' : y=-(b/a)x$  est aussi une asymptote

#### EXERCICE1

$(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$  est un repere orthonormé déterminer les éléments caractéristiques de la

Conique dont une équation est

1)  $x^2+(1/2)y=1$

2)  $2y^2-x^2=2$

3)  $x^2+4y+13=0$

4)  $y^2=-6x+6y+15$

5)  $3x^2+2x+3y^2-6y=0$

6)  $4x^2-9y^2=1$

#### EXERCICE2

On donne la distance  $d$  entre un foyer  $F$  et une droite  $D$  ; et un réel  $e$  choisir un repere

Et trouver une équation de la conique de foyer  $F$  de directrice  $D$  et d'excentricité  $e$

1)  $d=14$  et  $e=1$

2)  $d=9$  et  $e=4/5$

3)  $d=9$  et  $e=5/4$

#### EXERCICE3

Un reper orthonormé etant choisi

On donne le point  $F$  et la droite  $D$  trouver la conique de foyer  $F$  et de directrice  $D$

1)  $F(3; 2)$  et  $D : x=1$

2)  $F(1; 4)$  et  $D : x=3$

Suite de l'exercice 3

3)  $F(-1; 2)$  et  $D : y=-1$

4)  $d=1$  et  $e=2$

5)  $d=1$  et  $e=1/2$

## Correction exercice 1

1)  $x^2 = -(1/2)y + 1$  (E)  $\Leftrightarrow x^2 = \frac{-1}{2}(y - 2)$  soit  $\Omega(0; 2)$

Et  $R'(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$  soit  $M(x; y)$  dans le repère  $R(O; \vec{i}; \vec{j})$   $M(X; Y)$  dans  $R'$  alors  $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 2 \end{cases}$

(E)  $\Leftrightarrow X^2 = 2(-1/4)Y$  parabole de paramètre  $p=-1/4$  de directrice  $D : Y=1/8$  et de

Foyer  $F(0; -1/8)$  dans le repère  $R'$  alors dans le repère  $R$

$D : y=17/8$  et  $F(0; 15/8)$

6)  $4x^2 - 9y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} - \frac{y^2}{(\frac{1}{3})^2} = 1$  équation d'une hyperbole (H)

Soit  $a=(1/2); b=(1/3)$  donc  $c = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$

L'axe transverse est  $(O; \vec{i})$  de foyer  $F(\frac{\sqrt{13}}{6}; 0); F'(-\frac{\sqrt{13}}{6}; 0)$  de sommets  $A(1/2; 0)$

$A'(-1/2; 0); B(0; 1/3); B'(0; -1/3)$  et de directrices  $D : x = a^2/c = \frac{3}{2\sqrt{13}}$

Et  $D' : x = -\frac{3}{2\sqrt{13}}$

Excentricité  $e=c/a = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Asymptote  $\Delta : y=(b/a)x$  et  $\Delta' : y=-(b/a)x$

Donc  $\Delta : y=(2/3)x$  et  $\Delta' : y=-(2/3)x$

## EXERCICE 4

$R = (O; \vec{i}; \vec{j})$  est un repère orthonormé (C) une conique de foyer  $F(1; -1)$  ; de directrice  $D : x=5$  ; et d'excentricité  $e=1/3$

1) Déterminer la nature de la conique en précisant

\* l'axe focal

\* sommets

\* seconde directrice

2) donner l'équation de (C) dans le repère R et les coordonnées des sommets

## CORRECTION

Puisque  $e=1/3$  alors (C) est une ellipse ( $e<1$ ) puisque la directrice a pour équation

$D : x=5$  alors l'axe focal est perpendiculaire à D et passant par F

D'où l'axe focal a pour équation  $D_1 : y=-1$

Un sommet A de l'axe focal se trouve sur  $D_1$  donc son ordonné est -1

D'où  $A(x; -1)$  soit K le projeté orthogonal de A sur D d'où  $K(5; -1)$

$$Ae(C) \Leftrightarrow AF=e AH \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1/9(x-5)^2$$

En résolvant cette équation on trouve  $x=-1$  ou  $x=2$

D'où  $A(2; -1)$  ;  $A'(-1; -1)$  le centre  $\Omega$  de la conique est le milieu de  $[AA']$

D'où  $\Omega(1/2; -1)$  la longueur du demi grand axe  $a=\Omega A=3/2$

On sait que  $e=c/a$  d'où  $c=1/2$

L'axe focal étant parallèle à l'axe des abscisses donc l'axe non focal est

Parallèle à l'axe des ordonnées et passant par  $\Omega$

$$\text{Donc } b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{2}$$

Soit  $M(x; y)$  dans le repère R et  $M(X; Y)$  dans le repère  $R'(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$

D'où d'après la relation  $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O\Omega}$

$$\text{On a } \begin{cases} X = x - 1/2 \\ Y = y + 1 \end{cases} \quad (1)$$

Alors dans le repère  $R'$  ;  $B(0 ; \sqrt{2})$  et  $B'(0 ; -\sqrt{2})$

Dans le repère  $R$  et vu les relations (1) on a :  $B(\frac{1}{2}; \sqrt{2} - 1)$  et  $B'(\frac{1}{2}; -\sqrt{2} - 1)$

La seconde directrice  $D'$  :  $x=-5$

2) équation de l'ellipse dans le repère  $R'$  est  $\frac{x^2}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{y^2}{\sqrt{2}^2} = 1$

Dans le repère  $R$  et vu la relation (1)

On aura  $8x^2+9y^2-8x+18y-7=0$  (2)

### REMARQUE

On peut obtenir (2) en utilisant la définition d'une conique

Pour tout point  $M(x ; y)$   $H$  son projeté orthogonal sur  $D$  :  $x=5$

$MF=e MH$  et en élevant au carré avec  $F(1 ; -1)$   $H(5 ; y)$  et  $e=1/3$

### EXERCICES

soit  $\alpha$  un réel et  $R=(O ; \vec{i}; \vec{j})$  un repère orthonormé direct

$C_\alpha = \{M(x; y) / x^2 + y^2 + 2\alpha xy - 1 = 0\}$

1) Discuter suivant les valeurs de  $\alpha$  la nature de la conique

2) préciser les coniques  $C_0; C_1; C_{-1}$

3) on considère le repère  $R'(O; \vec{u}; \vec{v})$  image de  $R$  par la rotation de centre

$O$  et d'angle  $\Theta$

Montrer que  $x= X \cos\Theta - Y \sin\Theta$  et  $y= X \sin\Theta + Y \cos\Theta$

+4)a) montrer que le terme en  $XY$  est  $2\alpha \cos(2\Theta)$

b) En déduire alors  $\Theta$  pour que le terme  $XY$  n'apparait pas dans l'expression

c) quel est alors  $C_\alpha$

5) en déduire  $a$ ,  $b$  et  $c$  si  $\alpha=1/2$  et si  $\alpha=2$



## INDICATION

Pour la question 3 écrire  $M(x ; y)$  dans  $\mathbb{R}$   $\begin{cases} x = OM \cos \varphi \\ y = OM \sin \varphi \end{cases}$   $\Theta = \varphi' - \varphi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

vous remarquer alors que  $\begin{cases} X = \cos(\varphi') = OM \cos(\theta + \varphi) \\ Y = \sin(\varphi') = OM \sin(\theta + \varphi) \end{cases}$   $M(X ; Y)$  dans  $\mathbb{R}'$

attendez la correction