Prof:Oueslati Aymen Tél:27677722
BAC math

séri des exercice:,integrale,arithmetique,espace,similitude

Corrigé

Exercice 1

1-La fonction $f : x \mapsto \tan(x),\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est strictement croissante ;

car sa fonction dérivée est $f'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$

2- La fonction $f : x \mapsto \tan(x),\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est continue strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}[$ à valeurs dans IR ; donc f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur R.

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{1 + tg^2\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{1 + x^2}\ ;\ f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}\ ;\text{car } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

3-La fonction φ est continue dérivable sur IR* car f^{-1} est continue dérivable sur IR.

a) $\varphi'(x) = (f^{-1})'(x) - \frac{1}{x^2}(f^{-1})'\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. φ est continue à dérivée nulle sur IR* donc φ est constante sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ 0[$ et $]0\ ;\ +\infty[$.

b) La fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est paire donc :

$$\int_{-x}^{x} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\int_{0}^{x} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2.f^{-1}(x) = f^{-1}(x) - f^{-1}(-x)$$

D'où : $f^{-1}(x) = -f^{-1}(-x)$ donc f^{-1} est impaire.

f^{-1} et la fonction inverse sont impaires donc φ est impaire.

c) $\varphi(x) = \varphi(1) = 2f^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$.

4-) $I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$

a) $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{(t^2+1)^{-1}}{1+t^2}dt \Rightarrow I_1 = \int_0^1 dt - I_0 = 1 - I_0 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

b)La suite (I_n) est à termes positifs car $\frac{t^{2n}}{1+t^2} \geq 0$ pour tous réel t de

plus pour tout $0 \leq t \leq 1$ on a :

$$0 \leq t^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^2.t^{2n} \leq t^{2n} \Rightarrow 0 \leq \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq \frac{t^{2n}}{1+t^2}$$

d'où $I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$ c'est-à-dire $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

donc (I_n) est décroissante et a termes positifs.

c)(I_n) est décroissante minorée par 0 donc (I_n) est convergente.

On a pour tout $0 \leq t \leq 1$

$$1 \leq t^2 + 1 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n}$$

$$\Rightarrow I_n \leq \int_0^1 t^{2n}dt \Rightarrow \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$$

<u>Exercice 2 :</u>

1°/ Lemme de Gauss

Soit a et b deux entiers relatifs

Si n divise a et b alors n divise toute combinaison linéaire de a et b

c-à-d. n divise α a + β b ; avec α et β des entiers relatifs

2°/ a = 6k + 5 ; b = 8 k + 3

a/ 4a – 3b = 4 (6 k + 5) – 3 (8 k + 3) $\Rightarrow$ 4 a – 3 b = 11

b/ si n divise a et b alors n divise 4 a – 3 b donc n divise 11

par suite n = 1 ou 11 d'où a et b possèdent deux diviseurs commun

positifs : 1 et 11

Exercice 3:

1°/ $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AJ})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $\frac{AJ}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ car $AC^2=2AJ^2$

2°/ Soit S la similitude directe de centre B qui transforme C en I et A en

K , S est d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

S(C) = I ; S(A) = k $\Rightarrow (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{KI})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $\frac{KI}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3/ $(\overrightarrow{KI},\overrightarrow{AJ})=(\overrightarrow{KI},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AJ})$ (relation de Shasle)

$$=\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

D'ou $(\overrightarrow{KI},\overrightarrow{AJ})$ est un angle nul

* $\frac{AJ}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{KI}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc AJ = KI

Conclusion : $(\overrightarrow{KI},\overrightarrow{AJ})\equiv O[2\pi]$ donc

(IK) // (AJ) d'où IJAK est un parallélogramme.

Exercice 4 :Q . C . M

1°/ P : 2x + 3y + 4z – 1 = 0

a°/ $d(0,P)=1$ faux ;b°/ $d(0,P)=\dfrac{1}{\sqrt{29}}$ vraie

c°/ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{2}\\ 2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P : vraie d : faux

2°/ $P: 2x+y-z=0$

$$D:\begin{cases}x=\alpha+1\\ y=-4\alpha+1\\ z=-2\alpha+1\end{cases}$$

a/ $\overrightarrow{n_p}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_p}.\vec{u}=2\times1+1(-4)-1\times(-2)=0$ donc $D // P$:

a°/ vraie ; b/ faux ; c/ $D // P$ et $A \notin P$ donc $D \cap P=\phi$: faux ;

d°/ vraie voir ce qui précède

3°/ $E:\begin{pmatrix}x+y+z=3\\ 2x-z=1\end{pmatrix}$; $A(1,1,1)$

a°/ faux ; b/ vraie ;c/ faux ; d/ vraie