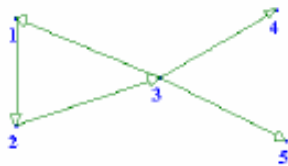


## généralités sur les graphes

Un graphe est défini :

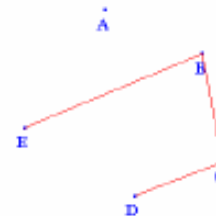
- 1) par un ensemble  $S$  de points (appelés « **sommets** »), le plus souvent symbolisés par des numéros 1, 2, 3, etc...., ou par des lettres a, b, c...
- 2) par des liens reliant certains sommets entre eux ; ces liens qui créent donc des couples de sommets, se nommeront (et se représenteront sur le dessin) par des « **arcs** » ou des « **arêtes** » selon que le graphe est « **orienté** » ou « **non orienté** ».

Exemple de graphe orienté



Arcs du graphe  
(1,2) (2,3) (3,1) (3,4) (3,5)

Exemple de graphe non orienté



Arêtes du graphe  
(B,C) (B,E) (C,D)

## Questions élémentaires sur les graphes

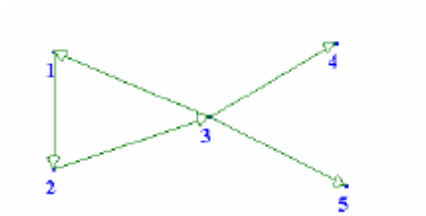
Les questions que l'on peut vous poser :	propriétés correspondante des graphes :	techniques mises en œuvre :
Trouver le nombre d'arêtes d'un graphe donné.	La somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.	
Associer une matrice à un graphe donné (orienté ou non). Associer un graphe à une matrice carrée donnée.	Une matrice associée à un graphe d'ordre $n$ est une matrice carrée d'ordre $n$ . Le terme situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne vaut $k$ , le nombre d'arêtes d'origine $i$ et d'extrémité $j$ .	
Déterminer le nombre de chaînes de longueur donnée qui relient deux sommets d'un graphe orienté ou non. Exhiber ces chaînes.	Lorsque $A$ désigne une matrice associée à un graphe, le terme de $A^r$ situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal au nombre de chaînes de longueur $r$ qui relient le sommet $i$ au sommet $j$ .	Eventuellement, penser à calculer un terme donné de $A^r$ sans calculer tous les termes.
Rechercher le diamètre d'un graphe.	C'est la plus grande distance entre deux sommets quelconques du graphe.	Prendre les sommets deux à deux, calculer leur distance, et garder le plus grand nombre trouvé.

*petit vocabulaire de la théorie des graphes :*

<b>Terme</b>	<b>Signification</b>
<b>adjacence</b>	deux arcs sont adjacents s'ils ont une extrémité commune ; deux sommets sont adjacents s'il existe un arc, ou une arête, les reliant
<b>arc</b>	couple $(x,y)$ dans un graphe orienté
<b>arête</b>	nom d'un arc, dans un graphe non orienté
<b>boucle</b>	arc reliant un sommet à lui-même
<b>Chaîne ou chemin</b>	Suite de sommets adjacents formant une suite d'arcs connexes reliant un sommet à un autre. Par exemple $(a;b) (b;c) (c;d) (d;b) (b;e)$ est un chemin reliant $a$ à $e$ ; on le note $(a,b,c,d,b,e)$ ou $a-b-c-d-b-e$
<b>chemin semi-eulérien</b>	désigne un chemin simple passant une fois et une seule par toutes les arêtes du graphe ; il n'existe pas toujours...
<b>Chemin hamiltonien</b>	désigne un chemin simple qui passe une fois et une seule par chaque sommet
<b>chromatique (nombre)</b>	c'est le nombre minimal de couleurs de couleurs nécessaires pour colorier tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents aient la même couleur ; (cf algorithme de coloration).
<b>connexe</b>	Un graphe est connexe s'il existe toujours une chaîne, ou un chemin, entre deux sommets quelconques. Par exemple le plan d'une ville doit être connexe.
<b>complet</b>	un graphe est complet si quels que soient deux sommets distincts, il existe un arc (ou une arête) les reliant dans un sens ou dans l'autre
<b>Cycle eulérien</b>	désigne un cycle (chemin en boucle) simple passant une fois et une seule par toutes les arêtes du graphe; il n'existe pas toujours...
<b>cycle</b>	Un cycle est une chaîne dont l'extrémité initiale coïncide avec l'extrémité finale
<b>degré d'un sommet</b>	nombre d'arête issues d'un sommet dans un graphe non orienté ; nombre d'arcs arrivant ou partant d'un sommet dans un arc orienté ;
<b>diamètre</b>	le diamètre d'un graphe est la plus grande de toutes les distances entre deux sommets quelconques du graphe
<b>distance</b>	la distance entre deux sommets d'un graphe est la plus petite longueur des chaînes, ou des chemins, reliant ces deux sommets.
<b>Eulérien</b>	Voir chemin semi-eulérien ou cycle eulérien.
<b>graphe orienté</b>	désigne un graphe où le couple $(x,y)$ n'implique pas nécessairement l'existence du couple $(y,x)$ ; sur le dessin, les liens entre les sommets sont des flèches
<b>longueur d'un chemin (ou d'une chaîne)</b>	nombre d'arêtes de la chaîne (exemple $a-b-c$ est de longueur 2)
<b>ordre d'un graphe</b>	nombre de sommets du graphe
<b>prédécesseur</b>	dans l'arc $(x,y)$ , $x$ est prédécesseur de $y$
<b>rang</b>	le rang d'un sommet est la plus grande longueur des arcs se terminant à ce sommet
<b>Sous-graphe</b>	le graphe $G'$ est un sous graphe de $G$ si l'ensemble des sommets de $G'$ est inclus dans l'ensemble des sommets de $G$ , et si l'ensemble des arcs de $G'$ est égal au sous-ensemble des arcs de $G$ reliant entre eux tous les sommets de $G'$ ; on a donc retiré de $G$ certains sommets, et tous les arcs adjacents à ces sommets ; par exemple, le graphe des routes de Bretagne est un sous-graphe du graphe des routes de France.
<b>stable</b>	soit un graphe $G (E ; R)$ , et $F$ un sous-ensemble de sommets. On dit que $F$ est un sous ensemble stable de $E$ s'il n'existe aucun arc du graphe reliant deux sommets de $F$ .
<b>successeur</b>	dans l'arc $(x,y)$ , $y$ est successeur de $x$

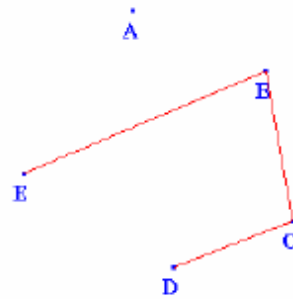
Matrice associée à un graphe :

Pour le traitement informatique, un graphe possède une matrice booléenne associée A où chaque ligne indique les successeurs par un 1, et l'absence de successeur par un 0:



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice d'un graphe orienté n'est pas nécessairement symétrique.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice d'un graphe non orienté est symétrique.

Remarques :

- 1) Quand on calcule  $A^p$  en calcul matriciel (à la calculatrice pour les grandes puissances), le terme  $a_{ij}$  de la matrice puissance est égal *au nombre de chemins de longueur p* reliant le sommet i au sommet j.
- 2) Les « 0 » présents dans la matrice  $A^p$  signifient un chemin de longueur p impossible.