Prof:Oueslati Aymen Tél:27677722 http://aymenacademy.com/
BAC math

exercices corigé "espace"

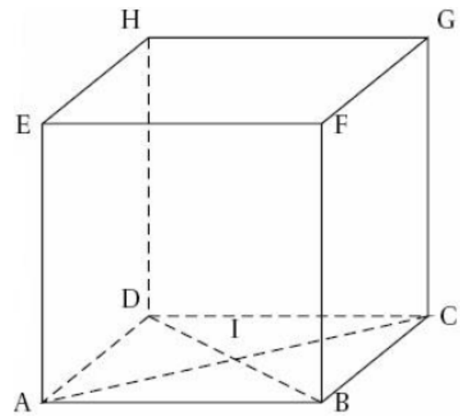
Eercice 1)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct.

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.

Son arête a pour longueur 1.

Le centre de la face ABCD est le point I.



Les questions **1)** et **2)** sont indépendantes.

1) a) Déterminer $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$.

b) En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\right) \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$

c) Déterminer l'ensemble (F) des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\right) \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

2) On appelle P le barycentre du système { (A, 2) ; (C, - 1)}.

a) Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.

b) Soit (G) l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$

Déterminer l'ensemble (G).

Montrer que le point A appartient à l'ensemble (G).

-

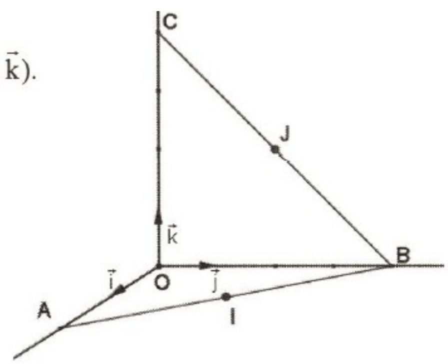
Exercice 2)

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le plan P d'équation $2x+y-2z+4=0$ et les points A de coordonnées $(3,2,6)$, B de coordonnées $(1,2,4)$ et C de coordonnées $(4,-2,5)$.

1. a. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
b. Vérifier que ce plan est P.
2. a. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
b. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan P.
c. Soit K le projeté orthogonal de O sur P. Calculer la distance OK.
d. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.
3. On considère dans cette question le point G barycentre du système de points pondérés $S=\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$.
a. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).
b. Déterminer la distance de G au plan P.
4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$. Déterminer Γ. Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à P et Γ ?

Eexercice 3



L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les points $A(2,0,0)$, $B(0,4,0)$ et $C(0,0,4)$ et on désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

1) Déterminer les coordonnées des points I et J.

2) Soit P l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $MI=MJ$.
   a/ Montrer que P est le plan d'équation $2x-4z+3=0$.
   b/ Montrer que la droite (OC) et le plan P sont sécants en un point K que l'on précisera.

Exercice 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les points A(1, 0 ,0), B(0, 2, 0) et C(0, 0, 3).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire qu'une équation du plan (ABC) est $6x+3y+2z-6=0$.

2) Soit I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].
   On désigne par Δ la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{k}$ et par Δ' la droite passant par J et de vecteur directeur $\vec{j}$.
   a) Donner une représentation paramétrique de chacune des droites Δ et Δ'.
   b) En déduire que Δ et Δ' sont sécantes au point $\Omega\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)$

3) Soit (S) la sphère de centre Ω et passant par O.
   a) Vérifier que (S) passe par les points A, B et C.
   b) En déduire le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Solution
Exercice 1

1) a) $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BF}$

b) $M \in (E) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\right) \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BF} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow M \in (BF)$.

c) $M \in (F) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\right) \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow$ M apartient au plan passant par B et ayant pour vecteur normal $\overrightarrow{BF} \Leftrightarrow M \in (ABC)$.

2) a) $2\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$ A est le milieu de [PC] $\Leftrightarrow$ P est le symétrique de C par rapport à A.

b) $M \in (G) \Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow$

$\left\|\overrightarrow{MP}\right\| = \left\|2\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI}\right)\right\| \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MP}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{IB}\right\| \Leftrightarrow PM = BD = AC = \sqrt{2} \Leftrightarrow M \in S_{(P,\sqrt{2})}$: la sphère de centre P et de rayon $\sqrt{2}$.

c) $PA = AC = \sqrt{2} \Rightarrow A \in (G)$.

Exercice 2

1. a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires $\left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & -4\end{vmatrix} = 8 \neq 0\right) \Rightarrow$ A, B et C ne sont pas alignés $\Rightarrow$ A, B et C déterminent un plan.

   b) On vérifie que les coordonnées de chacun des points A, B et C vérifient l'équation $2x + y - 2z + 4 = 0 \Rightarrow P = (ABC)$.

2. a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times 1 + 0 \times (-4) + (-2) \times (-1) = 0 \Rightarrow$ ABC est un triangle rectangle en A.

b) Δ est la perpendiculaire à P passant par O $\Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ vecteur normal de P est directeur de Δ

$$\Rightarrow \Delta : \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2\alpha \end{cases} ; \alpha \in IR$$

c) Soit K le projeté orthogonal de O sur P

$$\text{OK} = d(\text{O, P}) = \frac{|2\times 0 + 0 - 2\times 0 + 4|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{4}{3}.$$

d) $$\mathcal{V}(\text{OABC}) = \frac{1}{3}\times A(ABC)\times OK = \frac{1}{3}\times\frac{AB\times AC}{2}\times\frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}\times 4}{3\times 2\times 3} = \frac{8}{3}$$

Autrement : $\mathcal{V}(\text{OABC}) = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AO}\right|$

Où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-8\\-4\\8\end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{V}(\text{OABC}) = \frac{1}{6}\left|-8\times(-3)+(-4)\times(-2)+8\times(-6)\right| = \frac{1}{6}\times 16 = \frac{8}{3}$

3. G barycentre du système de points pondérés $S = \{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (1)

a) I est le centre de gravité du triangle $ABC \Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

En intercalant le point I dans (1), on obtient : $3\overrightarrow{GO}+3\overrightarrow{GI} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GI} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ G est le milieu de [OI] $\Rightarrow$ G $\in$ (OI).

b) $d(G,P) = ?$

$$I\left(\frac{3+1+4}{3},\frac{2+2-2}{3},\frac{6+4+5}{3}\right) \Rightarrow I\left(\frac{8}{3},\frac{2}{3},5\right)$$

G est le milieu de [OI] $\Rightarrow G\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{2}\right)$

$$\Rightarrow d(G,P) = \frac{\left|2\times\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-2\times\frac{5}{2}+4\right|}{3} = \frac{2}{3}$$

4. $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 5 \Leftrightarrow \left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = 5 \Leftrightarrow GM = \frac{5}{6} \Leftrightarrow M \in S_{\left(G,\frac{5}{6}\right)}$: la sphère de centre G et de rayon $\frac{5}{6}$.

$d(G,P) = \frac{2}{3} < \frac{5}{6} \Rightarrow \Gamma \cap$ P est un cercle de centre le point H projeté orthogonal de G sur P et de rayon $\text{r} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{36}} = \frac{1}{2}$.

Eercice 3

1) I(1,2,0) et J(0,2,2)
2) a) Soit M(x,y,z) un point de l'espace.

M∈P signifie $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=x^2+(y-2)^2+(z-2)^2$ signifie $2x-4z+3=0$

Ainsi P : $2x-4z+3=0$

Autrement: comme P est le plan médiateur du segment [IJ], alors $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal au plan P et par suite une équation de P est de la forme $-x+2z+d=0$, d est un réel.

Le milieu du segment [IJ] est un point de P alors $d=-\frac{3}{2}$ et par conséquent P : $2x-4z+3=0$

b) $M(x,y,z) \in (OC) \cap P$ signifie "il existe un réel α tel que $\begin{cases} x=0, y=0, z=\alpha \\ 2x-4z+3=0 \end{cases}$ signifie

$(x,y,z) = (0,0,\frac{3}{4})$ et par suite $(OC) \cap P = \{K\left(0,0,\frac{3}{4}\right)\}$

3) a) (S) : $x^2+y^2+\left(z-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{89}}{4}\right)^2$ alors (S) est la sphère de centre $K\left(0,0,\frac{3}{4}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{89}}{4}$.

b) $1^2+2^2-5=0$ alors $I \in (S)$, $2^2+2^2-\left(\frac{3}{2}\right) \times 2-5=0$ alors $J \in (S)$.

c) Si (S') est une sphère de centre $\Omega \in (OC)$ et passant par I et J alors $\Omega I = \Omega J$ d'où $\Omega \in P$, par conséquent $\Omega = K$ qui est le seul point d'intersection de P et (OC) et par suite (S')=(S).

4) L'intersection du plan P et la sphère (S) est le cercle de centre $K\left(0,0,\frac{3}{4}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{89}}{4}$.