

Exercice n°1 : X est la variable aléatoire de la loi continue et uniforme sur $[0 ; 1]$. Donner la probabilité des événements suivants :

a. $p(0,4 < X < 0,6)$ b. $p(X > 0,35)$ c. $p\left(X \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]\right)$ d. $p(X = 0,5)$

Exercice n°2 : Un livreur a promis de passer chez un client entre 10h et 11h. On suppose que la probabilité de son passage est uniformément répartie.

1°- Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 10h10min ?

2°- Quelle est la probabilité qu'il arrive entre 10h20 min et 10h40min ?

3°- Sachant que le client a attendu le livreur 15 minutes, quelle est la probabilité qu'il arrive dans les dix prochaines minutes ?

Exercice n°3 : La durée d'attente à une caisse de supermarché est assimilée à une loi exponentielle. La variable aléatoire égale au délai d'attente suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$.

1°- Quelle est la probabilité qu'un client attende moins de cinq minutes ?

2°- Quelle est la probabilité qu'il attende plus de 15 minutes ?

Exercice n°4 : La durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire T (exprimée en jours) qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,000 4. Calculer $p(T \leq 300)$; $p(T \geq 300)$

Calculer $p_{(T \geq 200)}(T \geq 500)$.

Exercice n°5 : La durée de vie, exprimée en heures d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,00026$

1°- Calculer $p(X \leq 1000)$ et $p(X > 1000)$.

2°- Sachant que l'événement $(X > 1000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'événement $(X > 2000)$.

3°- Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ?

Exercice n°6 : Polynésie – juin 2004

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$).

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1°- Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.

On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2°- Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3°- Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

4°- On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

5°- Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

Exercice n°7 : La durée en jours d'une plongée effectuée par un sous marin nucléaire est modélisée par une variable aléatoire de loi exponentielle. En consultant les livres de bord, on constate que 88 % des plongées ont duré plus de 6 jours.

a) Déterminer à 10^{-2} près le paramètre de la loi exponentielle.

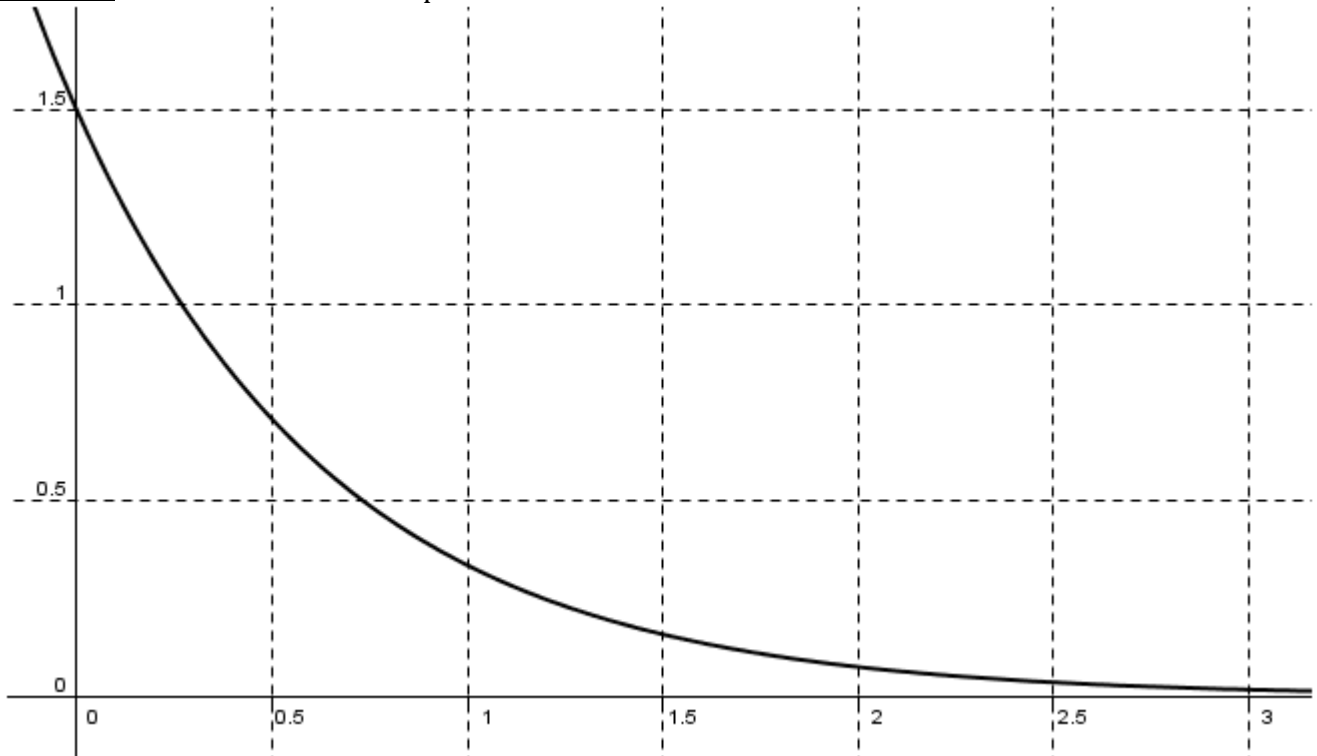
b) Calculer la probabilité pour qu'une plongée dépasse 3 jours.

c) Calculer la probabilité pour qu'une plongée dépasse dix jours sachant que le sous-marin est immergé depuis déjà 7 jours.

d) Comparer les résultats des questions b) et c) .

Exercice n°8 : Soit une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Partie A : La courbe ci-dessous représente la fonction densité associée :



1. Interpréter sur le graphique la probabilité $p(X \leq 1)$
2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ .

Partie B : On pose $\lambda = 1,5$.

1. Calculer $p(X \leq 1)$. On en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.
2. Calculer $p(X \geq 2)$
3. Dédire des calculs précédents l'égalité suivante :
$$p(1 \leq X \leq 2) = 0,173 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$
4. Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

$$F(x) = \int_0^x 1,5e^{-1,5t} dt$$

Déterminer la limite quand $x \mapsto +\infty$ de $F(x)$.

On obtient ainsi l'espérance de la variable X .

Partie C : Une machine outil fabrique des cylindres.

On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1,5$.

* si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté

* si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas.

* si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.
 - a. Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à $0,916$ à 10^{-3} près.
 - b. Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?
2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à des tirages successifs avec remise.
 - a. Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?
 - b. Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

Exercice n°1 : X est la variable aléatoire de la loi continue et uniforme sur [0 ; 1].

a. $p(0,4 < X < 0,6) = 0,6 - 0,4 = 0,2$

b. $p(X > 0,35) = 1 - p(X \leq 0,35) = 1 - 0,35 = 0,65$

c. $p\left(X \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

d. $p(X = 0,5) = 0$

Exercice n°2 : Un livreur a promis de passer chez un client entre 10h et 11h. On suppose que la probabilité de son passage est uniformément répartie.

Soit X la variable aléatoire égale au temps en heures écoulé après 10h

1°- Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 10h10min ?

$$p\left(X \leq \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6} \quad \left(10 \text{ min} = \frac{1}{6} h\right)$$

2°- Quelle est la probabilité qu'il arrive entre 10h20 min et 10h40min ?

$$p\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \left(20 \text{ min} = \frac{1}{3} h\right)$$

3°- Sachant que le client a attendu le livreur 15 minutes, quelle est la probabilité qu'il arrive dans les dix prochaines minutes ?

$$p_{(X \geq \frac{1}{4})}\left(X \leq \frac{5}{12}\right) = \frac{p\left(X < \frac{5}{12} \cap X \geq \frac{1}{4}\right)}{p\left(X > \frac{1}{4}\right)} = \frac{p\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{5}{12}\right)}{1 - p\left(X \leq \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{5}{12} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{12} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{9}$$

Exercice n°3 : La durée d'attente à une caisse de supermarché est assimilée à une loi exponentielle. La variable aléatoire égale au délai d'attente suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$.

1°- Quelle est la probabilité qu'un client attende moins de cinq minutes ?

Soit T la variable aléatoire égale au temps d'attente en min.

$$p(T \leq 5) = \int_0^5 0,04 e^{-0,04t} dt = [-e^{-0,04t}]_0^5 = -e^{-0,2} + 1 \approx 0,18$$

2°- Quelle est la probabilité qu'il attende plus de 15 minutes ?

$$p(T \geq 15) = 1 - p(T < 15) = 1 - \int_0^{15} 0,04 e^{-0,04t} dt = 1 - [-e^{-0,04t}]_0^{15} = e^{-0,6} \approx 0,55$$

Exercice n°4 : La durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire T (exprimée en jours) qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,0004.

$$p(T \leq 300) = \int_0^{300} 0,0004 e^{-0,0004t} dt = [-e^{-0,0004t}]_0^{300} = -e^{-0,12} + 1 \approx 0,11$$

$$p(T \geq 300) = 1 - p(T < 300) = 1 - [-e^{-0,12} + 1] = e^{-0,12} \approx 0,89$$

$$p_{(T \geq 200)}(T \geq 500) = \frac{p((T \geq 500) \cap (T \geq 200))}{p(T \geq 200)} = \frac{p(T \geq 500)}{p(T \geq 200)} = \frac{e^{-0,0004 \times 500}}{e^{-0,0004 \times 200}} = e^{-0,0004 \times 300} = e^{-0,12} \approx 0,11$$

Exercice n°5 : La durée de vie, exprimée en heures d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,00026$

1°- Calculer $p(X \leq 1000)$ et $p(X > 1000)$.

$$p(X \leq 1000) = \int_0^{1000} 0,00026 e^{-0,00026t} dt = [e^{-0,00026t}]_0^{1000} = -e^{-0,26} + 1 \approx 0,23$$

$$p(X \geq 1000) = 1 - p(X \leq 1000) \approx 0,77$$

2°- Sachant que l'événement $(X > 1000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'événement $(X > 2000)$.

$$p_{(X > 1000)}(X > 2000) = \frac{p((X > 2000) \cap (X > 1000))}{p(X > 1000)} = \frac{p(X > 2000)}{p(X > 1000)} = \frac{e^{-0,52}}{e^{-0,26}} = e^{-0,26} \approx 0,77$$

3°- Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ?

$$\begin{aligned}
 p_{(X>2000)}(X < 3000) &= \frac{p(X > 2000 \cap X < 3000)}{p(X > 2000)} = \frac{p(2000 < X < 3000)}{p(X > 2000)} \\
 &= \frac{-e^{-0,00026 \times 3000} + e^{-0,00026 \times 2000}}{e^{-0,00026 \times 2000}} = \frac{-e^{-0,78} + e^{-0,52}}{e^{-0,52}} = \frac{e^{-0,52}(-e^{-0,26} + 1)}{e^{-0,52}} = 1 - e^{-0,26} \approx 0,23
 \end{aligned}$$

Exercice n°6 : Polynésie – juin 2004

1. X suit la loi de durée de vie sans vieillissement ou encore loi exponentielle de paramètre λ ; donc

$$p(X > 10) = e^{-10\lambda} = 0,286 \iff -10\lambda = \ln 0,286$$

$$\text{ou encore } \lambda = -\frac{\ln 0,286}{10}.$$

La calculatrice donne $\lambda = 0,125$ à 10^{-3} près.

2. 6 mois = 0,5 année. On a donc $p(X \leq 0,5) = 1 - e^{-0,125 \times 0,5} = 1 - e^{-0,0625} \approx 0,061$.
3. L'appareil ayant déjà fonctionné 8 ans, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure dix ans est égale à $p_{(X>8)}(X > 10) = \frac{p[(X > 10) \cap (X > 8)]}{p(X > 8)} = \frac{p(X > 10)}{p(X > 8)} = \frac{e^{-0,125 \times 10}}{e^{-0,125 \times 8}} = e^{-0,125 \times 2} \approx 0,779$.

4. On a ici un schéma de Bernoulli, avec comme succès le fait pour un oscilloscope d'avoir une durée de vie supérieure à 10 ans, dont la probabilité est égale à 0,286 et un nombre d'appareils égal à 15.

La probabilité de n'avoir aucun oscilloscope en état de marche au bout de 10 ans est donc : $(1 - 0,286)^{15} = 0,714^{15}$.

Donc inversement la probabilité d'avoir au moins un oscilloscope en état de marche au bout de 10 ans est égale à :

$$1 - 0,714^{15} \approx 0,994.$$

5. On reprend la question précédente avec non plus 15, mais n oscilloscopes. La probabilité qu'au moins 1 sur les n oscilloscopes fonctionne après 10 ans est donc : $1 - 0,714^n$.

Il faut chercher le plus petit naturel n tel que

$$1 - 0,714^n \geq 0,999 \iff 0,001 \geq 0,714^n \iff \ln 0,001 \geq n \ln 0,714$$

(par croissance de la fonction \ln), soit finalement $\frac{\ln 0,001}{\ln 0,714} \leq n$ (car $\ln 0,714 < 0$). La calculatrice donne $20,5 \leq n$.

Le premier naturel convenant est donc 21.

Exercice n°7: La durée en jours d'une plongée effectuée par un sous marin nucléaire est modélisée par une variable aléatoire de loi exponentielle. En consultant les livres de bord, on constate que 88 % des plongées ont duré plus de 6 jours.

a) Déterminer à 10^{-2} près le paramètre de la loi exponentielle.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de jours de plongée :

$$p(X \geq 6) = 0,88 \Leftrightarrow e^{-6\lambda} = 0,88 \Leftrightarrow -6\lambda = \ln(0,88) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,88)}{6} \Leftrightarrow \lambda \approx 0,02$$

b) Calculer la probabilité pour qu'une plongée dépasse 3 jours.

$$p(X \geq 3) = 1 - \int_0^3 0,02 e^{-0,02t} dt = 1 - [-e^{-0,02t}]_0^3 = e^{-0,06} \approx 0,94$$

c) Calculer la probabilité pour qu'une plongée dépasse dix jours sachant que le sous-marin est immergé depuis déjà 7 jours.

$$p_{(X>7)}(X > 10) = \frac{p((X > 10) \cap (X > 7))}{p(X > 7)} = \frac{p(X > 10)}{p(X > 7)} = \frac{e^{-0,02 \times 10}}{e^{-0,02 \times 7}} = e^{-0,06} \approx 0,94$$

d) Comparer les résultats des questions b) et c) .

On retrouve les mêmes résultats car la loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement donc la probabilité qu'une plongée dépasse dix jours sachant que le sous-marin est immergé depuis déjà 7 jours est égale à la probabilité qu'une plongée dépasse 3 jours.

Exercice n°8 : Soit une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Partie A : La courbe ci-dessous représente la fonction densité associée :

1. Interpréter sur le graphique la probabilité $p(X \leq 1)$

$p(X \leq 1)$ est l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ .

λ est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses, on lit $\lambda = 1,5$.

Partie B : On pose $\lambda = 1,5$.

1. Calculer $p(X \leq 1)$. On en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.

$$p(X \leq 1) = \int_0^1 1,5 e^{-1,5t} dt = [-e^{-1,5t}]_0^1 = -e^{-1,5} + 1 \approx 0,777$$

2. Calculer $p(X \geq 2)$

$$p(X \geq 2) = 1 - \int_0^2 1,5 e^{-1,5t} dt = 1 - [-e^{-1,5t}]_0^2 = e^{-3} \approx 0,05$$

3. Dédurre des calculs précédents l'égalité suivante :

$$p(1 \leq X \leq 2) = p(X \leq 2) - p(X \leq 1) = (1 - e^{-3}) - (1 - e^{-1,5}) = e^{-1,5} - e^{-3} \approx 0,173 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

4. Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

$$F(x) = \int_0^x 1,5 e^{-1,5t} dt$$

$$\text{On pose } \begin{cases} u'(t) = 1,5 e^{-1,5t} \\ v(t) = t \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} u(t) = -e^{-1,5t} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$$

On a alors :

$$F(x) = [-te^{-1,5t}]_0^x - \int_0^x -e^{-1,5t} dt = [-te^{-1,5t}]_0^x + \int_0^x e^{-1,5t} dt$$

$$F(x) = [-te^{-1,5t}]_0^x + \left[-\frac{1}{1,5} e^{-1,5t}\right]_0^x = \left[-te^{-1,5t} - \frac{2}{3} e^{-1,5t}\right]_0^x$$

$$F(x) = -xe^{-1,5x} - \frac{2}{3} e^{-1,5x} + \frac{2}{3}$$

Déterminer la limite quand $x \mapsto +\infty$ de $F(x)$.

On a :

$$-xe^{-1,5x} = \frac{1}{1,5} (-1,5xe^{-1,5x})$$

On pose $X = -1,5x$ alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-1,5x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$$

et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1,5x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

Par conséquent par somme on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{2}{3}$$

On obtient ainsi l'espérance de la variable X .

Partie C : Une machine outil fabrique des cylindres.

On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1,5$.

* si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté

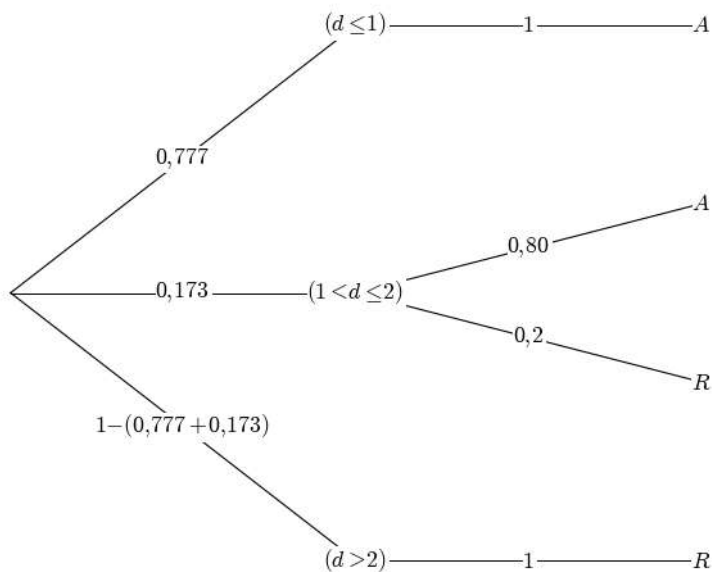
* si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas.

* si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.

a. Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,916 à 10^{-3} près.

On peut réaliser un arbre :



$$p(A) = p_{(d \leq 1)}(A) \times p(d \leq 1) + p_{(1 < d \leq 2)}(A) \times p(1 < d \leq 2)$$

$$p(A) = 0,777 + 0,173 \times 0,8 \approx 0,916$$

b. Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?

$$p_A(1 < d \leq 2) = \frac{p((1 < d \leq 2) \cap A)}{p(A)} = \frac{0,173 \times 0,8}{0,916} \approx 0,151$$

2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à des tirages successifs avec remise.

a. Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?

Soit X la variable aléatoire dénombrant le nombre de cylindres acceptés.

X suit la loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,916$

On a alors :

$$p(X = 10) = \binom{10}{10} (0,916)^{10} (1 - 0,916)^0 = (0,916)^{10} \approx 0,416$$

b. Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

L'événement « au moins un cylindre refusé » est l'événement contraire de « les 10 cylindres sont acceptés »

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 10) \approx 0,584$$