INTEGRALES 4ème Mathématiques

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos x$.

1) a) Calculer $\forall x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$; $f'(x)$.

b) Justifier que f réalise une bijection de $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0\,,1]$.

2) Soit g la fonction réciproque de f.

a) Justifier que g est dérivable sur $[0\,,1[$.

b) Montrer que $\forall x \in [0\,,1[: g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) a) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Montrer que $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$

Exercice 2

Soit la suite réelle U définie sur IN^* par : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\, x\, dx$

1) a) Justifier l'existence de U_n pour tout $n \in IN^*$.

b) Montrer que $\forall n \in IN^*$, $U_n \geq 0$.

c) Montrer que la suite U est décroissante. Que peut-on conclure ?

d) Vérifier que : $U_1 = 1$ et que $U_2 = \frac{\pi}{4}$.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\, cos^2 x\, dx = \frac{1}{n+1} U_{n+2}$$

b) En déduire $\forall n \in IN^*$ on a : $U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, U_n$.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\frac{n}{n+1}\, U_n \leq U_{n+1} \leq U_n$

En déduire la limite de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

1) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.

b) Tracer la courbe C_f de f.

c) Montrer graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]1\,,2]$.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

c) Tracer C' la courbe de f^{-1}.

3) Soit la fonction g définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ par : $g(x) = \int_0^{\tan x} f(t)dt$

a) Montrer que g est dérivable sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ et que $\forall x \in \left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$; $g'(x) = tan^2x + 2$

b) En déduire $g(x)$ en fonction de x.

c) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par la courbe C_f et les droites d'équations :

$x = 0$; $x = 1$ et $y = 1$.

Exercice 4

Donner la bonne réponse

1) Soit $I = \int_0^{\pi} x \sin t \; dt$

a) $I = \pi \sin t$ **b)** $I = 2x$ **c)** $I = \pi \sin x$

2) Soit $J = \int_{-1}^{1} \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}} dx$

a) $J = 1$ **b)** $J = -1$ **c)** $J = 0$

3) La fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{1+t}\, dt$ est dérivable sur :

a) $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ **b)** $]-1\,,+\infty[$ **c)** $]-\infty\,,-1[$