Prof : Oueslati Aymen
Tel 27677722

"série de revision avec correction " intégrale logarithme arithmétique

Bac Math

Exercice 1 :

1)a)Trouver à l'aide de l'algorithme d'Euclide-Bezout une solution particulière de $17x - 12y = 1$

b)Résoudre dans Z , $17x \equiv 1 \pmod{12}$

c)Résoudre dans Z^2 , (E) : $17x - 12y = 3$

2)Soit x et y deux entiers et $N = 2 + 17x = 5 + 12y$

a)Montrer que x et y sont solutions de (E)

b)Déduire que $N \equiv 53 \pmod{204}$

3)Montrer que si $N \equiv 53 (\text{mod } 204)$ alors $\begin{cases} N \equiv 2 \ (\text{mod } 17) \\ N \equiv 5 \ (\text{mod } 12 \end{cases}$

Exercice 2 :

1) a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5.

c) En déduire que $6^{40} \equiv 1(mod 11)$ et que $6^{40} \equiv 1(mod 5)$

d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55

2) Dans cette question x et y désignent deux entiers relatifs.

a) Vérifier que l'équation (E) : $65\,x - 40y = 1$ n'a pas de solution.

b) Vérifier que l'équation (E') : $17\,x - 40y = 1$ admet au moins une solution.

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E'). En déduire le reste modulo 40 de 17.

Exercice 3 :

I) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x + 1 + \ln x$.

a) Etudier les variations de g sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$

et que $0{,}27 < \alpha < 0{,}28$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

3) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

a) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1.

b) Tracer T et (C) en précisant les branches infinies de (C).

II) Soit la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x) = \int_1^{2x} f(t)dt$

1) Montrer que F est dérivable sur IR_+ et calculer $F'(x)$.

2) Soit $x \geq 0$

a) Montrer que pour tout réel t de $[1,x]$; $\frac{1}{2}\ln t \leq f(t) \leq t\ln t$.

b) Calculer les intégrales $I(x) = \int_1^{2x} \ln t \, dt$ et $J(x) = \int_1^{2x} t \ln t \, dt$

c) En déduire que $x\ln(2x) - x + \frac{1}{2} \leq F(x) \leq 2x^2 \ln(2x) - x^2 + \frac{1}{4}$.

d) Déterminer alors $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{F(x)}{x}\right)$.

3) On donne $F(0) \approx 0{,}2$. Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Exercice 4

On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$.

1) Soit n un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de n, le reste de 7^n modulo 100.

2) En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que $a = 100k - 1$.

3) a) En utilisant la formule du binôme, montrer que $a^{100} \equiv 1 \pmod{100^2}$.

b) Déterminer les quatre derniers chiffres de a^{100}.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x^2)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I. 1) Montrer que pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$ $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

2) a) Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = x - 2\ln x - \ln(1 + \dfrac{1}{x^2})$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe (C) au point O.

b) Donner la position relative de la droite Δ et la courbe (C).

c) Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ et la courbe (C).

II. Soit G la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$ dt.

1) a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) En déduire que pour tout x appartenant à $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ $G(x) = x$.

c) Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$.

2) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

b) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Solution
Exercice 1

1)a)

reste	17	12	5	2	1
quotient		1	2	2	1

On a 17.5-12.7 =1 donc (5,7) est une solution de 17x-12y =1

quotient		1	2	2	1
0	1	1	3	7	17
1	0	1	2	5	12

On a 17.5-12.7 =1 donc (5,7) est une solution de 17x-12y =1

b)on a 17.5 ≡ 1 (mod 12)

17.x≡ 1(mod 12) donc 17x≡ 17 .5 (mod 12) donc 17(x-5) ≡0(mod 12) donc 12 divise 17(x-5) et 12∧17 =1

Donc 12 divise (x-5) donc x -5 =12.k avec k entier donc x=12.k +5

Réciproquement si x= 12k +5 alors 17x =17.12k +17.5 ≡1 (mod 12)   Donc S = {12k +5 , k entier }

c)(15 ,21) est une solution particulière donc 17.15 -12 .21 =17x-12y donc17(x-15)=12(y-21) donc 17 divise 12(y – 21)

or 17 et 12 sont premiers entre eux donc 17 divise y -21 donc y-21 =17k , k entier donc y =17k+21

par suite 17(x-15) = 12 .17k eq x-15 = 12k eq x = 12k+15   donc S ={(12k +15,17k +21), k entier }

2)a)2 +17x = 5 +12y donc 17x -12y =3 donc (x,y) est solution de (E)

b)x=12k+15 donc N = 2 +17 x = 2+17 (12k +15)=2+204 k+255 =257 +204 k =53 +204 +204k ≡ 53 (mod 204)

3)on suppose que N ≡ 53 (mod 204) donc N =53 +204k′ donc N -2 =51 -204 k′ =17(12k + 3)≡ 0(mod 17) et

N -5 =48 +204 k′=12(4 +17k′)≡0(mod 12) donc N ≡2(mod 17) et N ≡ 5(mod 12)

4)n≡2(mod 17) et n ≡ 5 (mod 12) eq n ≡ 53 (mod 204) eq n = 53 +204 k′′ et n ∈ [400,500] donc n=53 +204.2 =461

Exercice 2

1) **a)** $6^5 = 7776 = 11 \times 706 + 10 \Rightarrow 6^5 \equiv 10(mod\ 11)$

$\Rightarrow 6^5 \equiv -1(mod\ 11)$ ou encore $6^{10} \equiv 1(mod\ 11)$

b) $6^2 = 36 \equiv 1(mod\ 5) \Rightarrow 6^4 \equiv 1(mod\ 5)$

c) $6^{10} \equiv 1(mod\ 11) \Rightarrow 6^{40} \equiv 1(mod\ 11)$

$6^4 \equiv 1(mod\ 5) \Rightarrow 6^{40} \equiv 1(mod\ 5)$

d) $\begin{cases} 6^{40} \equiv 1(mod\ 11) \\ 6^{40} \equiv 1(mod\ 5) \\ 5 \wedge 11 = 1 \end{cases} \Rightarrow 6^{40} \equiv 1(mod\ 5 \times 11)$

$\Rightarrow 6^{40} - 1 \equiv 0(mod\ 55)$

2) **a)** $65 \wedge 40 = 5 \neq 1$ donc (E) n'admet pas de solutions.

b) $17 \wedge 40 = 1$ donc (E') admet au moins une solution.

c) Remarquons que $(-7, -3)$ est une solution particulière de (E'). (Algorithme d'euclide)

$\begin{cases} 17x - 40y = 1 \\ 17 \times (-7) - 40 \times (-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 17(x + 7) = 40(y + 3)$

$\Rightarrow 17$ divise $(y + 3)$ et 40 divise $(x + 7)$ car $17 \wedge 40 = 1$

$\Rightarrow y = 17k - 3$ et $x = 40k - 7$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Inversement ; Si $x = 40k - 7$ et $y = 17k - 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$17(40k - 7) - 40(17k - 3) = -119 + 120 = 1.$

Ainsi $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(40k - 7, 17k - 3); k \in \mathbb{Z}\}$

Pour $k = 1$, $(33, 14)$ est une solution de (E') c'est-à-dire

$17 \times 33 - 40 \times 14 = 1 \Rightarrow 17 \times 33 = 40 \times 14 + 1$ ou encore

$17 \times 33 \equiv 1(mod\ 40)$ et par suite 33 est l'inverse modulo 40 de 17.

Exercice 3

1) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x \ln x}{x+1} = 0 = f(0)$

b) $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{(x+1)} = -\infty$. F n'est pas dérivable à gauche en 0 et (C) admet au point O une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

2) a) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$;

$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \ \forall\, x > 0$. ainsi g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

$g(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$.donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 0$. De plus $g(0.27) \approx -0.03 < 0$

$g(0.28) \approx 0.07 > 0$

donc $0,27 < \alpha < 0,28$.

c)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3) a) $x \mapsto x\ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, de plus $\forall\, x > 0, x+1 \neq 0$ donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et $\forall\, x > 0$; $f'(x) = \frac{(\ln x + x.\frac{1}{x})(x+1) - x\ln x)}{(x+1)^2}$

$$= \frac{x\ln x + \ln x + x + 1 - x\ln x}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

b) Le signe de f' est le signe de g(x).

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

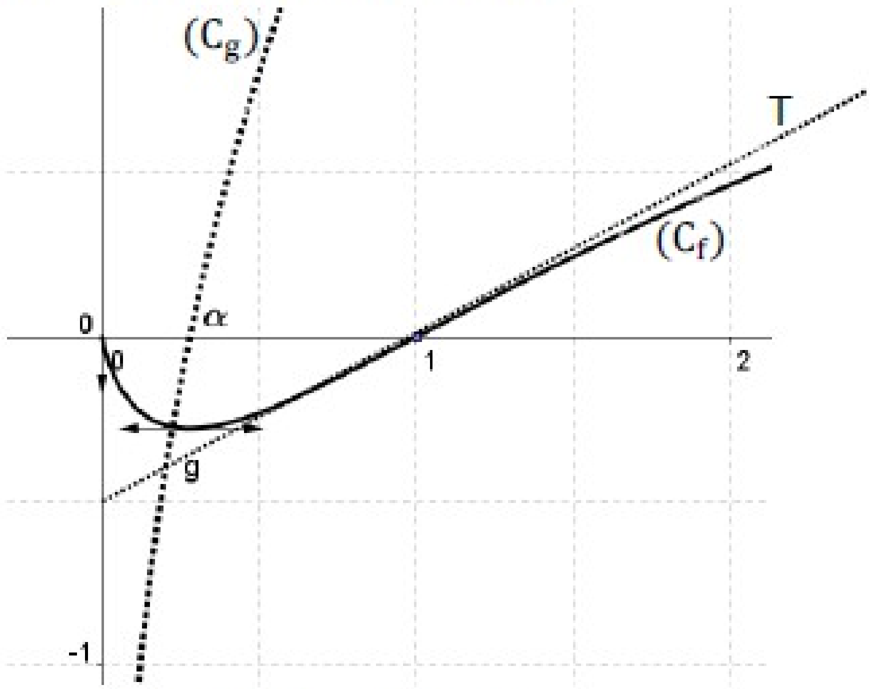
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$$

4) a) $T : y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{2}(x-1) + 0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$T : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}.\frac{x}{x+1} = 0$



I)

1) $x \longmapsto 2x$ est dérivable sur $[0,+\infty[$

$x \longmapsto f(x)$ est Continue sur $[0,+\infty[$

Donc F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geq 0$;

$F'(x) = 2\, f(2x)$.

2) a) $\forall\, t \geq 1$

$f(t) - t\ln t = \frac{t\ln t}{t+1} - t\ln t = (t\ln t)\,(\frac{t}{t+1} - 1)$

$= (t\ln t)\left(\frac{-1}{t+1}\right) \leq 0$

$f(t) - \frac{1}{2}\ln t = \frac{t\ln t}{t+1} - \frac{1}{2}\ln t = (\ln t)\,(\frac{t}{t+1} - \frac{1}{2})$

$= (\ln t)\left(\frac{t-1}{t+1}\right) \geq 0$

Ainsi $\forall\, t \geq 1\,;\ \frac{1}{2}\ln t \leq f(t) \leq t\ln t$.

b) $\mathrm{I}(x)=\int_1^{2x}\ln t\,dt \quad = \Big[\ t\ln t - t\ \Big]_1^{2x} = 2x\ln 2x - 2x + 1$

$\mathrm{J}(x)=\int_1^{2x} t\ln t\,\mathrm{d}t$

On pose $\begin{cases} u(x)=\ln t \\ v'(x)=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=\frac{1}{t} \\ v(x)=\frac{t^2}{2} \end{cases}$

Alors $\mathrm{J}(x)= \Big[\frac{t^2}{2}\ln t\Big]_1^{2x} - \int_1^{2x}\frac{t}{2}dt = 2x^2\ln 2x - \frac{1}{4}\Big[\ t^2\Big]_1^{2x}$

$= 2x^2\ln 2x - x^2 + \frac{1}{4}$.

c) On a $\forall\, t \in [1,x]$; $\frac{1}{2}\ln t \le f(t) \le t\ln t$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int_1^{2x}\ln t\,dt \ \le\ \int_1^{2x} f(t)dt \ \le\ \int_1^{2x} t\ln t\,\mathrm{d}t$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\mathrm{I}(x) \le \mathrm{F}(x) \le \mathrm{J}(x)$ et par suite

$x\ln(2x) - x + \frac{1}{2} \ \le\ \mathrm{F}(x) \ \le\ 2x^2\ln(2x) - x^2 + \frac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(2x) - x + \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(2x) - 1 + \frac{1}{2x}) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln(2x)-x+\frac{1}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2x) - 1 + \frac{1}{2x} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{F}(x)}{x} = +\infty$

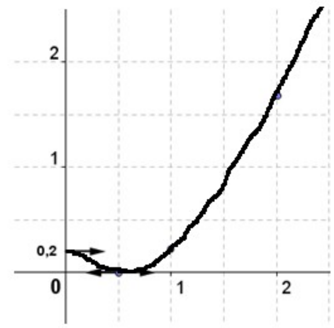
3) F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \ge 0$; $\mathrm{F}'(x) = 2\,f(2x)$

$\mathrm{F}'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x\ln(2x)}{2x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$

x	0		1/2		$+\infty$
$\mathrm{F}'(x)$	0	−	0	+	
F	0,2	↘	0	↗	$+\infty$

F admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$.



Exercice 5

I. 1) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$

2) a) Pour tout $x > 0$,

$$f(x) = x - \ln(1+x^2) = x - \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = x - \ln(x^2) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = x - 2\ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-2\frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty.$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-2\frac{\ln x}{x}\right) - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 1.$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = -\infty.$. C admet une branche parabolique de direction celle de la droite $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

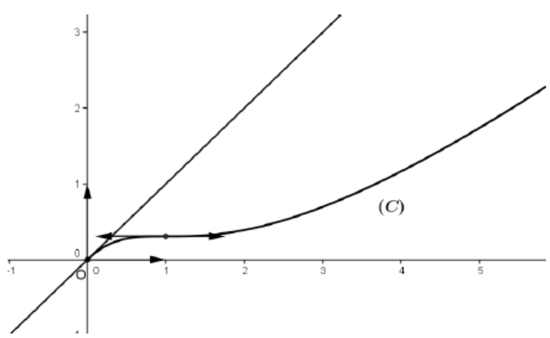
3)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
f	0	↗			$+\infty$

4) a) $\Delta : y = f_d'(0)x + f(0) = x$.

b) Pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x) - x = -\ln(1+x^2) \leq 0$ car $1+x^2 \geq 1$ donc la courbe C est au-dessous de Δ.

c)



II. 1) a) La fonction $u : x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc $u\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right) \subset \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$. On en déduit que G est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[, G'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 x}\left(1+\tan^2 x\right) = 1.$

b) On sait que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[, G'(x) = 1$ donc $G(x) = x + c,\ c \in \mathbb{R}$. Or $G(0) = 0$, il en résulte que $c = 0$ Ainsi pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[, G(x) = x.$

c) $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$

2) a) $\begin{cases} u(x) = \ln\left(1+x^2\right) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \\ v(x) = x \end{cases}$

$$\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx = \left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$$

$$= \ln 2 - 2\left[\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}dx\right] = \ln 2 - 2\left[1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx\right] = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

b) $\mathcal{A} = \int_0^1 \left|f(x) - x\right| dx = \int_0^1 \left[x - f(x)\right]dx = \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

$= \ln 2 - 2 + 2 \times \frac{\pi}{4} = \left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right) u.a$