Série des exercices avec correction

intégrale et suite , logarithme , arithmétique

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1) a- Dresser le tableau de variation de la fonction f

b- Montrer que la droite D d'équation x = 1 est un axe de symétrie pour (C).

c- Préciser la branche infinie de (C) au voisinage de + oo.

d- Tracer la courbe (C).

2) Soit F la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ *Par* $F(x)=\int_1^{1+\tan x}\frac{dt}{t^2-2t+2}$

a- Montrer que F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ *et que F'(x) = 1.*

b- En déduire que F(x) = x et que $\int_1^2\frac{dt}{t^2-2t+2}=\frac{\pi}{4}$

3) a-Montrer que $\int_1^2 f(x)dx = 2\ln 2 - 2\int_1^2\frac{x^2-x}{x^2-2x+2}dx$

b- Vérifier que pour tout $x\in IR$, $\frac{x^2-x}{x^2-2x+2}=1+\frac{x-1}{x^2-2x+2}-\frac{1}{x^2-2x+2}$

c-Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites

Exercice 2

1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1 \pmod{10}$.

a) Montrer que $a^9 + a^8 + .. + a + 1 \equiv 0 \pmod{10}$.

b) En déduire que $a^{10} \equiv 1 \pmod{10^2}$.

(On pourra utiliser l'égalité $a^{10} - 1 = (a-1)(a^9 + a^8 + .. + a + 1)$).

2) Soit b un entier.

a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.

b) En déduire que $b^4 \equiv 1 \pmod{10}$ si et seulement si b est premier avec 10.

3) Soit b un entier premier avec 10.

a) Montrer que $b^{40} \equiv 1 \pmod{10^2}$.

b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42} .

Exercice 2

On définie pour tout entier naturel non nul n l'intégrale $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx$

1) Montrer que la suite (I_n) est décroissante .Déduire qu'elle est convergente

2) Montrer que $\forall n\in IN^*; \frac{1}{4(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ *En déduire* $\lim_{n\to\infty} I_n$.

3) a) Montrer que $\forall n\in IN^*; I_n=\frac{1}{4(n+1)}+\frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3}dx$

b) Déduire que $\forall n\in IN^*\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4(n+2)} \le (n+1)I_n \le \frac{1}{4}+\frac{2}{n+2}$

c) Calculer $\lim_{n\to\infty}(n+1)I_n$ *En déduire* $\lim_{n\to\infty} nI_n$

4) Pour tout entier naturel non nul on pose $S_n=\sum_{K=1}^{n}(-1)^k I_K$ *et* $I=\int_0^1 \frac{-x}{(x+1)^3}dx$ *:*

a- Montrer que $I=-\frac{1}{8}$

b- Vérifier que $\forall n\in IN^*$ *et* $\forall x\in[0,1]: \sum_{K=1}^{n}(-1)^K x^K=\frac{-x}{1+x}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$

c- En déduire que $S_n-I=(-1)^n\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3}dx$.

d- Montrer que $|S_n-I|\le I_{n+1}$ *, En déduire que (S_n) est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\ln\,(1+\tan x)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\ \vec{j}\ )$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^{+}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-}} f(x)=+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Vérifier que les points O, $A\left(\frac{\pi}{4},\ln 2\right)$ et $I\left(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2}\right)$ sont des points de (C).

(On donne $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$).

b) Montrer que $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2-f(x)$ pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

(On rappelle que $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$)

c) Justifier alors que le point I est un centre de symétrie de la courbe (C).

Dans l'annexe ci-jointe, on a placé les points I et A dans le repère $(O,\vec{i},\ \vec{j}\ )$.

3) Tracer la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\ \vec{j}\ )$ en précisant sa tangente au point O.

4) On désigne par S_1 la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OA) et les droites d'équations $x=0$ et $x=\frac{\pi}{8}$ et on désigne par S_2 la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OA) et les droites d'équations $x=\frac{\pi}{8}$ et $x=\frac{\pi}{4}$.

a) Justifier que les surfaces S_1 et S_2 ont la même aire.

b) Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\,(1+\tan x)dx$.

5) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la réciproque de f.

b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour x appartenant à J.

c) Donner la valeur de $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+(e^x-1)^2}dx$.

Solution

exercice 1:

1) f est définie ssi $x^2-2x+2 \succ 0$

or $x^2-2x+2=0$

$\Delta=-4 \prec 0$ sig $x^2-2x+2 \succ 0$

$Df = IR$

$$f'(x)=\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}$$

b-

c- $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ donc c_f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses

2) b- $F'(x) = 1$ sig que $F(x) = x + c$ or $F(0) = 0$ donc $F(x) = x$

$$\int_1^2 \frac{dt}{t^2-2t+2} = F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

2) a- $\int_1^2 f(x)dx$

$u(x) = ln(x^2 - 2x + 2)$ $\quad$ $u'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$

$v'(x) = 1$ $\quad$ $v(x) = x$

$\int_1^2 f(x)dx$ = ……………….=…..

b-Réduire au même dénominateur

c- $A = \int_1^2 \left|\ln(x^2-2x+2\right| dx$

$$= \int_1^2 \ln(x^2-2x+2)dx$$

$$= 2ln2 - 2\int_1^2 \frac{x^2-x}{x^2-2x+2}dx$$

$$= 2ln2 - 2\int_1^2 1+\frac{x-1}{x^2-2x+2}-\frac{1}{x^2-2x+2}dx$$

= ……………………

$$= \left(ln2 + \frac{\pi}{4}\right) ua$$

exercice 2:

1- a) $1 \equiv 1 \ (\text{mod } 10)$

$a \equiv 1 \ (\text{mod } 10)$

$a^2 \equiv 1 \ (\text{mod } 10)$

$a^3 \equiv 1 \ (\text{mod } 10)$ on somme ces dix congruences on obtient :

$a^9 + a^8 + a^7 + \ldots\ldots + a + 1 \equiv 10 \ (\text{mod } 10) \equiv 0 \ (\text{mod } 10)$.

.

.

.

$a^9 \equiv 1 \ (\text{mod } 10)$

b) $a^{10} - 1 = (a-1)(a^9 + a^8 + a^7 + \ldots\ldots + a + 1)$, or $a - 1 = 10k$, $k \in \mathbb{Z}$ et

$a^9 + a^8 + a^7 + \ldots\ldots + a + 1 = 10k'$, $k' \in \mathbb{Z}$ alors $a^{10} - 1 = 10^2 kk'$ d'où $a^{10} \equiv 1 (\text{mod} 10^2)$.

2- a)

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

Les restes possible sont 0 , 1 , 5 et 6 .

b) si b est premier avec 10 alors $b \equiv 1$ ou 3 ou 7 ou 9 (mod10) et d'après le tableau ci-dessus on a : $b^4 \equiv 1 \ (\text{mod} 10)$.

si $b^4 \equiv 1 \ (\text{mod} 10)$ alors $b \equiv 1$ ou 3 ou 7 ou 9 (mod10) donc b est premier avec 10 .

3- Soit b un entier premier avec 10 .

a) b est premier avec 10 alors $b^4 \equiv 1 \ (\text{mod} 10)$, on pose $a = b^4$ alors $(b^4)^{10} = b^{40} \equiv 1 (\text{mod} 10^2)$.

b) 67 est premier avec 10 alors $67^{40} \equiv 1 \ (\text{mod} 100)$ et $67^2 \equiv 89 \ (\text{mod} 100)$

d'où $67^{42} \equiv 89 (\text{mod} 100)$ donc les deux derniers chiffres de 67^{42} sont 8 et 9 .

exercice 3

1)$I_{n+1} - I_n = \ldots\ldots\ldots \leq 0$ or I_n est minoré par 0 d'où le résultat

2) $0 \leq x \leq 1$ sig $1 \leq x+1 \leq 2$ sig $1 \leq (x+1)^2 \leq 4$ sig ………………

3) a- $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$ une intégration par partie avec

$u(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ $\quad u'(x) = \frac{-2}{(1+x)^3}$

$v'(x) = x^n$ $\quad v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

nous donne le résultat

b- de même que la question n°2

c- $\lim_{n\to+\infty} (n+1)I_n = \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{4}$

$\lim_{n\to+\infty} nI_n + I_n = \frac{1}{4}$ or $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{4}$

4)a- $I = \int_0^1 \frac{-x}{(X+1)^3} dx$ une intégration par partie avec

$u(x) = x$ $\quad u'(x) = 1$

$v'(x) = \frac{-1}{(x+1)^3}$ $\quad v(x) = \frac{1}{2(x+1)^2}$

nous donne $I = \frac{-1}{8}$

b- $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k = (-x)\frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}$,somme des termes consécutif d'une suite géométrique de raison (-x) et de premier terme (-x).

$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k = \frac{-x}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$

c- $S_n - I = \ldots\ldots\ldots = (-1)^n \int^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3} dx$

d- $|S_n - I| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3} dx$ or $(1+x)^2 \leq (1+x)^3$ donc $\frac{1}{(1+x)^3} \leq \frac{1}{(1+x)^2}$

sig $\frac{x^{n+1}}{(1+x)^3} \leq \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}$ sig $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx$

d'où le résultat

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = I = \frac{-1}{8}$$

exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ par f (x) = ln (1 + tanx).

1- a) On pose u (x) = 1 + tanx donc f = ln o u

$\lim_{x\to\frac{-\pi}{4}^+} u(x) = 0^+$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}$ lnx = -∞ alors $\lim_{x\to\frac{-\pi}{4}^+}$ f (x) = -∞ .

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} u(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}$ lnx = +∞ alors $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}$ f (x = = + ∞.

b) u est dérivable strictement positive sur $\left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors f est dérivable sur $\left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$f'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}$ strictement positive sur $\left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

c)

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2- a) f (0) = ln (1 + 0) = 0 alors O ∈ C .

f ($\frac{\pi}{4}$) = ln (1 + 1) = ln2 alors A ∈ C.

f ($\frac{\pi}{8}$) = ln (1 + $\sqrt{2}$ - 1) = ln$\sqrt{2}$ = ln $2^{\frac{1}{2}}$ = $\frac{1}{2}$ ln2 alors I ∈ C .

b) f ($\frac{\pi}{4}$ - x) = ln (1 + tan ($\frac{\pi}{4}$ - x)) = ln (1 + $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$) = ln ($\frac{2}{1+\tan x}$) = ln2 – ln(1+tanx)= ln2 – f(x) .

c) Pour tout x ∈ $\left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, 2 ($\frac{\pi}{8}$) – x = $\frac{\pi}{4}$ - x ∈ $\left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et f ($\frac{\pi}{4}$ – x) = ln2 – f (x) = 2 ($\frac{ln2}{2}$) – f (x)
alors I est le centre de symétrie de C .

3- La tangente T au point O à pour équation T : y = f '(x)(x-0) + f(0) d'où T : y = x

4- a) $O \in (OA) \cap C$, $I \in (OA) \cap C$ et $A \in (OA) \cap C$, $I = A * O$ centre de symétrie de C et $[OA]$ donc S_1 et S_2 sont symétriques par rapport à I alors S_1 et S_2 ont même aire .

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ = l'aire de la région du plan limitée par C , la droite (OA) d'équation $y = (\frac{4ln2}{\pi})x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ = l'aire du triangle OAB (avec $B(\frac{\pi}{4}, 0)$) – l'aire de S_1 + l'aire de S_2 car S_1 et S_2 ont même aire

donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ = l'aire du triangle OAB $= \frac{1}{2} OB \times AB = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} \times \ln 2 = \frac{\pi \ln 2}{8}$.

5- a) f est une fonction continue strictement croissante sur $\left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc f réalise une bijection de $\left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $f\left(\left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = IR = J$.

b) f est dérivable sur $\left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x) \neq 0$ sur $\left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc f^{-1} est dérivable sur IR .

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1+\tan x}{1+\tan^2 x}$ or $\ln(1 + \tan x) = y$ signifie $1 + \tan x = e^y$ signifie $\tan x = e^y - 1$.

$(f^{-1})'(y) = \frac{1+e^y-1}{1+(e^y-1)^2} = \frac{e^y}{1+(e^y-1)^2}$.

Conclusion : pour tout $x \in IR$, $(f^{-1})'(x) = \frac{e^x}{1+(e^x-1)^2}$.

c) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+(e^x-1)^2} dx = \int_0^{\ln 2} (f^{-1})'(x)dx = [f^{-1}(x)]_0^{\ln 2} = f^{-1}(\ln 2) - f^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.