Exercice 1 :

Soit A et I deux points du plan et soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) Construire les points O=R(A) et B=R(O) puis montrer que IBOA est un losange.
2) Soit (Γ) le cercle de centre O et de rayon OI . Soit $M\in(\Gamma)$ et M'=R(M).
   a) Montrer que lorsque M décrit le cercle (Γ) , le point M' décrit un cercle (Γ') qu'on précisera.
   b) Soit Ω le deuxième point d'intersection des cercles (Γ) et (Γ').
   Montrer que si $M\neq I$, les points M, Ω et M' sont alignés .
3) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que f(A)=O et f(O)=B.
   b) Montrer que f est une symétrie glissante . Préciser son axe et son vecteur.
   c) Vérifier que $f = S_{(OB)} \circ R$ où S(OB) est la symétrie orthogonale d'axe (OB).
   d) Déterminer l'ensemble des points N du plan tels que R(N)=f(N).
4) Soit C et D les symétriques respectifs de I par rapport à O et B .
   On désigne par S la similitude directe définie par S(A)=C et S(O)=D et on pose $h = S \circ R^{-1}$.
   a) Déterminer h(O) et h(B).
   b) En déduire que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
   c) Déterminer alors les éléments caractéristiques de la similitude S.
5) Soit g la similitude indirecte telle que g(C)=O et g(D)=B.
   a) Déterminer le rapport de g . En déduire que g admet un seul point invariant qu'on notera J.
   b) On désigne par (Δ) l'axe de la similitude g et par E le point d'intersection des droite (Δ) et (OC).
   Soit E' l'image de E par g. Montrer que $\overrightarrow{JE} = 2\overrightarrow{JE'}$
   c) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{JE}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{JE}}\right)[2\pi]$. En déduire que les droites (Δ) et (CD) sont parallèles.
   d) Soit C' le symétrique du point C par rapport à la droite (Δ) .
   Montrer que E est le centre de gravité du triangle JCC'. En déduire que $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EO}$
   e) Déduire un procédé de construction du point E puis l'axe (Δ) et le centre J de la similitude g .

Exercice 2 :

On considère dans le plan orienté, un triangle ABC équilatéral de sens direct .
On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC] et par D le symétrique de A par rapport à C

1- Soit f l'antidéplacement de P tel que f(C)=A et f(A)=B.
   Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur
2- Soit g la similitude directe telle que g(B)= D et g(I)=C.
   Montrer que g(A)=A et déterminer les éléments caractéristiques de g
3- Soit Ω le point définie par $\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega I} = \vec{0}$
   a- Justifier que fog est une similitude indirecte
   b- Déterminer fog(I) et fog(A)
   c- Vérifier que $\overrightarrow{\Omega B} + 2\overrightarrow{\Omega A} = \vec{0}$. En déduire fog(Ω)= Ω
4- a- Déterminer le rapport de la similitude fog
   b- Montrer que l'axe de la similitude fog est perpendiculaire à la droite (AB) en Ω.

Exercice 3 :

On considère dans le plan orienté, un triangle ABC tel que AC=2AB et qu'une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ soit comprise entre 0 et π. Les cercles (Γ_1) et (Γ_2) passant par A et de centre respectifs B et C se recoupent en E. On désigne par S_A la similitude directe de centre A transformant (Γ_1) en (Γ_2).

1) a) Soit M un point de (Γ_1) et M' son image par S_A . Justifier la relation : $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM'}}\right)[2\pi]$
   b) Démontrer que les points M, E et M' sont alignés
2) On désigne par σ_A la similitude indirecte de centre A qui transforme (Γ_1) en (Γ_2).
   a) Donner le rapport de σ_A et montrer que σ_A a pour axe la médiatrice du segment [BK] où K est le milieu du segment [AC]
   b) Soit l'application $f = \sigma_A \circ S_A^{-1}$. Déterminer la nature de f et la caractériser
   c) En déduire que les images par S_A et σ_A de tout point M sont symétriques par rapport à (AC)

Exercice 4 :

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. La bissectrice intérieure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)$ coupe [AC] en O. On désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AB) et H' le milieu de [OA]

1) Faire une figure et montrer que le triangle OAB est isocèle et H le milieu de [AB].
2) Soit f la similitude directe telle que f(B)=O et f(H)=H'.
   a) Montrer que le rapport de f est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et que $\frac{\pi}{6}$ une mesure de son angle.
   b) Montrer que H' est le milieu de [Of(A)]. En déduire que A est le centre de f.
3) Les cercles (Γ) et (Γ') de diamètres respectifs [AB] et [AO] se coupe en D .
   a) Montrer que les points O, B et D sont alignés.
   b) Montrer que les triangles BCH et ODH' sont équilatéraux et que f(C)=D.
   c) Montrer que le quadrilatère ADCH est un losange.
4) a) Soit $g = S_{(DH)} \circ f$ où $S_{(DH)}$ la symétrie axiale d'axe (DH). Déterminer g(A) et g(C).
   b) Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport .
   c) Soit Ω le centre de g . Montrer que $\overline{\Omega A} = 3\overline{\Omega D}$ puis construire le centre Ω et l'axe Δ de g.

Exercice 5 :

Soit dans le plan orienté un triangle ABC tel que : AC=2AB et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

$\mathscr{C}_1$ est le cercle passant par A et B et tangent à (AC) en A, $\mathscr{C}_2$ est le cercle passant par A et C et tangent à (AB) en A. $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent en A et O. M∈[AB], N∈[AC] et AN=2BM, I est le milieu de [MN]

1/ S est la similitude directe qui transforme B en A et A en C.
   a) Déterminer le rapport et un angle de S.
   b) Montrer que O est le centre de S. En déduire que $S(\mathscr{C}_1)=\mathscr{C}_2$.
2/a) Montrer que OAB est un triangle rectangle en B.
   b) En déduire que OAC est un triangle rectangle en A.
3/ a) Montrer que S(M)=N
   b) Déterminer l'ensemble des points I lorsque M décrit [AB].
4/ S' est la similitude indirecte tel que S'(B)=A et S'(A)=C.
   a) Déterminer le rapport de S'.
   b) O' est le centre de S'. Caractériser S'oS'.
   c) En déduire que $O'C = 4O'B$ .Puis construire O'. Δ est l'axe de S' ; construire Δ
   d) Δ coupe (AB) en G et (AC) en H. Montrer que G est le milieu de [O'H]. En déduire que S(G)=H.

Exercice 6 :

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre I et A un point de $\mathscr{C}$. Soient B le point image de A par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et O le milieu du segment [AB] ; la demi droite [OI) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en D.

1) Soit S la similitude directe de centre A qui transforme I en O.
   Déterminer le rapport k et l'angle α de S.
2) Soit K le pied de la hauteur issue de A à [DB].
   a) Montrer que le triangle ADK est rectangle isocèle en K.
   b) En déduire que S(D) = K.
   c) Soit J le milieu [AD]. Montrer que I, J et K sont alignés.
3) a) Soit E le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathscr{C}$. Montrer que S(E) = B.
   b) Soit F le point tel que ABEF est un carré de sens direct. Montrer que S(F) = I.
   c) Montrer que les droites (ID) et (EF) sont perpendiculaires et en déduire que (OK) est la médiatrice de [IB] **(On pourra déterminer S((ID)) et S((EF)))**
   d) Soit L le symétrique de I par rapport à O. Montrer que l'image du carré ABEF par S est le carré ALBI
4) Soit σ la similitude indirecte qui transforme J en K et K en A.
   a) Déterminer le rapport k' de σ .
   b) Soit w le centre de la similitude indirecte σ . Caractériser $\sigma \circ \sigma$.
   Déterminer $\sigma \circ \sigma(J)$ et déduire que w = D.
   c) Déterminer l'axe de σ et montrer que $\sigma(I)$ = H où H est l'orthocentre du triangle ABD.
   d) Soit A' = σ(A). Montrer que K est le milieu [A'D] .
5) a) Soit g = $\sigma \circ$ S. Déterminer g(D) et g(A) puis donner la nature de g.
   b) La droite (OJ) coupe (AA') en J'. Déterminer la forme réduite de g .