solution espace

Exercice 1 :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}$, P= (ACH) et Q = (EGB) .

1- a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}36\\-36\\36\end{pmatrix} = 36\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

b) $36\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = 36\,\overrightarrow{n_P}$ donc P : x – y + z + d = 0 or A(0 , 0 , 0) $\in$ P donc d = 0 d'où P : x – y + z = 0 .

c) $\overrightarrow{EG} \wedge \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AC} \wedge (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \wedge (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}) = \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-36\\36\\-36\end{pmatrix} = -36\,\overrightarrow{n_p}$ donc Pet Q sont parallèles alors Q : x – y + z + d = 0 , or E(0 ,0 , 6) $\in$ Q d'où d = -6 d'où Q : x – y + z – 6 = 0 .

2- S : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = 0$.

a) S : $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 3$ donc S est la sphère de centre I (1 , -1 , 1) et de rayon $\sqrt{3}$.

b) $\overrightarrow{AJ} = \alpha\,\overrightarrow{n_Q}$ signifie $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\-\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$ et J $\in$ Q donc $\alpha + \alpha + \alpha - 6 = 0$ donc $\alpha = 2$ d'où J (2 , -2 , 2) .

A $\in$ S et J $\in$ S , A * J (1 , -1 , 1) = I donc $[AJ]$ est un diamètre de S .

c) P est parallèle à Q et (AJ) perpendiculaire à Q en J donc (AJ) perpendiculaire à P en A de plus $[AJ]$ est un diamètre de S d'où S est tangente à P en A et S est tangente à Q en J .

3- t est la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$.

-

a) $t_{\vec{u}}$ (A) = A' signifie $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$ d'où A' (2 , 4 , 2) . $t_{\vec{u}}$ (J) = J' signifie $\overrightarrow{JJ'} = \vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$

d'où J' (4 , 2 , 4).

b) $t_{\vec{u}}$ (S) = S'est la sphère de centre $t_{\vec{u}}$ (I) = I'(3 , 3 , 3) et de rayon $\sqrt{3}$.

c) S est tangente à P en A alors S' est tangente à $t_{\vec{u}}$ (P) en $t_{\vec{u}}$ (A) = A' or $t_{\vec{u}}$ (P) = P car $\vec{u}\ .\ \overrightarrow{n_P} = 0$ donc S' est tangente à P en A' (2 , 4 , 2) .

S est tangente à Q en J alors S' est tangente à $t_{\vec{u}}$ (Q) en $t_{\vec{u}}$ (J) = J' or $t_{\vec{u}}$ (Q) = Q car $\vec{u}\ .\ \overrightarrow{n_Q} = 0$ donc

S' est tangente à Q en J' (4 , 2 , 4) .

EXERCICE 2

1) a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

Le vecteur $\vec{n}$ de composantes $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, don $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) et par suite

une équation du plan (ABC) est $2x - y + z + d = 0$

le point $A \in (ABC)$ donc d = -1. On en déduit que (ABC) : $2x - y + z - 1 = 0$.

✓ *On peut traiter autrement cette question : il suffit de vérifier que les points A, B et C appartiennent au plan P : 2x-y+z-1 = 0 .*

2) a) $S: x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 14$. On en déduit que S est la sphère de centre $I(3,0,1)$ et de rayon $r = \sqrt{14}$.

b) $d(I,(ABC)) = \sqrt{6} < r$ donc S coupe(ABC) suivant un cercle (Γ) de rayon $r' = \sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2}$.

Or $A \in S$, $B \in S$ et $AB = 4\sqrt{2} = 2r'$ ce qui prouve que [AB] est un diamètre de (Γ).

c) $\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ par suite la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (AB) en A. D'où (AC) est tangente à (Γ) en A.

3) a) on pose R' le rayon de S' donc R' = 3 r = $3\sqrt{14}$ et $J = h(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{CJ} = 3\overrightarrow{CI}$. En posant $J(x,y,z)$, l'égalité

vectorielle précédente donne $\begin{cases} x-2=3 \\ y-4=-12 \\ z-1=0 \end{cases}$ il résulte que $J(5,-8,1)$.

b) On sait que h(S) = S'. Or $C \in (ABC)$ donc h((ABC)) = (ABC) et puisque S coupe (ABC) suivant le cercle (Γ) donc S' = h(S) coupe (ABC) = h((ABC)) suivant le cercle $\Gamma' = h(\Gamma)$.

c) $C \in (AC)$ donc h((AC)) = (AC) et puisque (AC) est tangente à S en A donc (AC) = h((AC)) est tangente à S' en h(A) = E

h(A) = E $\Leftrightarrow \overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{CA}$. En posant $E(x,y,z)$, l'égalité vectorielle précédente donne $\begin{cases} x-2=-1 \\ y-4=-1 \\ z-1=1 \end{cases}$

Il en résulte que $E(-1,1,4)$.